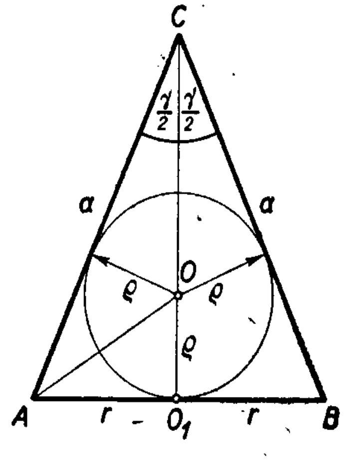
Tekintsük a forgáskúp és beírt gömb egy tengelymetszetét. A betűzést az ábra mutatja.



A feladat értelmében

$$\frac{2r\pi a}{3}=4\varrho^2\pi,$$

vagyis

$$ar=6\varrho^2. \tag{1}$$

Ismeretes, hogy a háromszög területe a kerület ($2s$) és a beírt kör sugarával kifejezve $t=s\varrho$. Másrészt a háromszög területe $AO_1\cdot O_1C=r\sqrt{a^2-r^2}$, és így (mivel jelen esetben $s=a+r$)

$$(a+r)\varrho=r\sqrt{a^2-r^2},$$

vagyis

$$\varrho=r\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a+r}=r\sqrt{\frac{(a-r)(a+r)}{(a+r)^2}}=r\frac{\sqrt{a-r}}{a+r},$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve

$$ar=\frac{6r^2(a-r)}{a+r},$$

vagyis

$$a^2+ar=6ar-6r^2,$$

azaz

$$6r^2-5ar+a^2=0,$$

ahonnan

$$r_1=\frac{a}{2},\qquad r_2=\frac{a}{3}.$$

A kúp félnyílása $\frac{\gamma}{2}$, tehát

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{a},$$

vagyis

$$\sin\frac{\gamma_1}{2}=\frac{r_1}{a}=\frac{1}{2},\qquad \text{amiből}\quad \frac{\gamma_1}{2}=30^\circ,\ \text{és így}\ \gamma_1=60^\circ,$$
$$\sin\frac{\gamma_2}{2}=\frac{r_2}{a}=\frac{1}{3},\qquad \text{amiből}\quad \frac{\gamma_2}{2}=19^\circ28',\ \text{és így}\ \gamma_2=38^\circ56'.$$

Szabados József (Bp., III., Árpád g. II. o. t.)