

**I. megoldás:** Az ismert

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

azonosság alapján  $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$ , és  $\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos 3x \cos x$ .

Tehát a megoldandó egyenlet így is írható:

$$(2) \quad 2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x) = 0$$

A baloldal zárójeles tényezőjére ismét alkalmazva (1)-et

$$\cos 2x + \cos 3x = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

mely értéket behelyettesítve (2)-be, nyerjük

$$4 \cos x \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Ez akkor teljesül, ha a baloldal valamely tényezője 0.

a)  $\cos x = 0$ , amiből

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi,$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

b)  $\cos \frac{5x}{2} = 0$ , amiből

$$x_3 = \frac{\pi}{5} \pm 2k\pi,$$

$$x_4 = \frac{3\pi}{5} \pm 2k\pi,$$

$$x_5 = \pi \pm 2k\pi,$$

$$x_6 = \frac{7\pi}{5} \pm 2k\pi,$$

$$x_7 = \frac{9\pi}{5} \pm 2k\pi,$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

c)  $\cos \frac{x}{2} = 0$ , egyenlet gyökei a b) alatti egyenlet gyökei között már elő fordulnak.

Mivel az egyenleten csak azonos átalakításokat végeztünk, a kapott értékek valóban gyökei az eredeti egyenletnek.

*Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. II. o. t.)*

**II. megoldás:** A baloldal minden tagját az ismert goniometriai azonosságok felhasználásával kifejezzük  $\cos x$  hatványaival:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

Behelyettesítés, rendezés és  $2 \cos x$  kiemelése után adódik

$$2 \cos x (4 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1) = 0.$$

Innen vagy

$$(1) \quad \cos x = 0,$$

vagy

$$(2) \quad 4 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$(3) \quad \cos x = -1$$

kielégíti a (2) alatti egyenletet. Osztvá a  $(\cos x + 1)$  gyöktényezővel,  $\cos x$  további lehetséges értékeire a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(4) \quad 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0,$$

ahonnan

$$(5) \quad \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Az (1), (3) és (5) alatt nyert négyféle  $\cos x$  értékhez tartozó  $x$  gyökök megegyeznek az I. megoldásban talált gyökökkel.

*Grätzer György (Bp., VI., Kölcsey g. IV. o. t.)*