*a)* **I. megoldás:** $S_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{2+1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} = 2 - \frac{2+2}{2^2}$, vagyis $n = 1$ és $n = 2$-re az $S_n = 2 - \frac{2+n}{2^n}$ képlet helyes. Teljes indukcióval bizonyítjuk a képlet általános helyességét. Tegyük föl, hogy valamely $k$ természetes számra képletünk igaz, vagyis

$$S_k = 2 - \frac{2+k}{2^k},$$

akkor

$$S_{k+1} = S_k + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2+k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{4+2k-k-1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2+(k+1)}{2^{k+1}}.$$

Tehát képletünk, ha $k$-ra igaz, akkor $(k+1)$-re is igaz, de 1-re (és 2-re) láttuk, hogy igaz, amiből következik, hogy képletünk minden természetes számra fennáll.

*Weisz Katalin* (Bp., I., Szilágyi Erzsébet lg. IV. o. t.)

**II. megoldás:** $S_n$ a következő alakban írható

$$\begin{aligned}
S_n = &\frac{1}{2}+\\
&+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\\
&+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\\
&\vdots\\
&+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\\
&\vdots\\
&+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Az egymás alatti tagok összegét rendre $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots, s_n$-nel jelölve $s_k$ olyan mértani sor összege, melynek első tagja $\frac{1}{2^k}$ hányadosa $\frac{1}{2}$ és tagjainak száma $n-k+1$, vagyis

$$S_k = \frac{1}{2^k}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Tehát

$$\begin{aligned}
S_n &= s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_n =\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n =\\
&= 1 \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+n}{2^n}.
\end{aligned}$$

*Behringer Tibor* (Bp., III., Árpád g. I. o. t.)

**III. megoldás:**

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}. \tag{1}$$

Mindkét oldalt $\frac{1}{2}$-vel szorozva:

$$\frac{S_n}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \ldots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \tag{2}$$

(1)-ből (2)-t kivonva

$$\frac{S_n}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^{n+1}},$$

ahol a zárójelben mértani sor van, melynek hányadosa $\frac{1}{2}$, tehát

$$\frac{S_n}{2}=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

vagyis

$$S_n=2-\frac{2+n}{2^n}.$$

*Tömből István* (Pécs, Bányaip. mélyép. techn. III. o. t.)

*b)* **I. megoldás:** A teljes indukció módszere természetesen itt is célhoz vezet.

$$n=1\text{-re } S_1=1\cdot 2\cdot 3=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Tegyük fel, hogy

$$S_k=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}\text{ is helyes,}$$

akkor

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+2)(k+3)=$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)+4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

Tehát tényleg az $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ képlet minden természetes $n$-re igaz.

*Rázga Tamás* (Bp., II., Rákóczi g. II. o. t.)

**II. megoldás:** Vizsgáljuk a következő sor összegét:

$$S_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Vonjuk ki ebből az összegből önmagát, de úgy, hogy a kivonandó $k$-adik tagját a kisebbítendő $k+1$-edik tagjából vonjuk ki:

$$\begin{aligned}S_n-S_n=0&=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot(5-1)+3\cdot 4\cdot 5(6-2)+\\&+\ldots+n(n+1)(n+2)\big[(n+3)-(n-1)\big]-n(n+1)(n+2)(n+3)\\&=4\cdot S_n-n(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

vagyis

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

*Kálmán György* (Szolnok, Beloiannisz g. III. o. t.)

**III. megoldás:** A sor $k$-adik tagja $k(k+1)(k+2)=k^3+3k^2+2k$. A sor tehát átrendezhető a következő alakba:

$$S_n=(1^3+2^3+\ldots+n^3)+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+2(1+2\ldots+n)$$

A zárójelben lévő köbszámok, négyzetszámok és természetes számok összegének képlete ismert, azokat felhasználva

$$S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

*Jónás József* (Gyöngyös, Vak Bottyán g. III. o. t.)