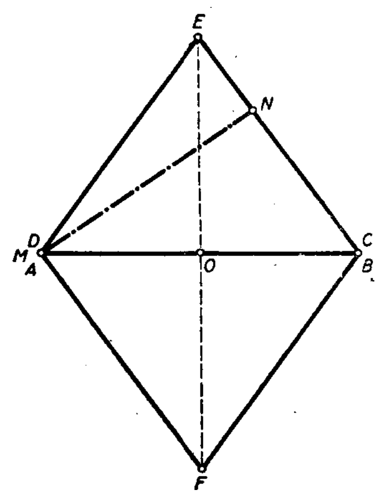
I. megoldás: Legyenek az $ABCDEF$ oktaéder AD és BC élei merőlegesek a rajzunk síkjára és vetítsük az oktaédert merőlegesen erre a síkra (1. ábra).



1. ábra

A vetületben az AD és BC élek ponttá fajulnak. Az AD és EB kitérő éleken a keresett MN pontokat az az egyenes metszi ki, amely (amellett, hogy mindkét élt metszi) mindkét élre merőleges (normál transzverzális). Ebből a meghatározásból következik, hogy MN párhuzamos a képsíkkal és így a vetületben valódi nagyságban látszik. Mivel az EB él vetítősíkja párhuzamos az AD éllel, azért a vetületben is $MN \perp EB$. Az EN és NB aránya (párhuzamos vetítésről lévén szó) a térben és vetületben ugyanaz.

A vetületben

$$NBC_{\triangle} \sim BOE_{\triangle},$$

mint közös hegyesszöggel bíró derékszögű háromszögek, tehát

$$MN : AB = EO : EB.$$

$$\text{De} \quad AB = a, \quad EO = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad \text{és} \quad EB = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad \text{és így}$$

$$MN = \frac{a\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

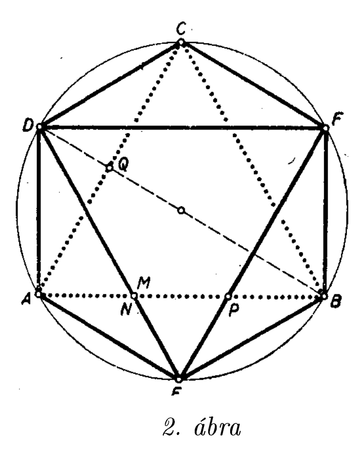
$$NB = \sqrt{AB^2 - MN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

$$EN = EB - NB = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

Tehát $EN : NB = 1 : 2$.

Tehát a keresett pontok az éleket $1 : 2$ arányban osztják, és a keresett minimális távolság $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

II. megoldás: Legyen az oktaéder ABC lapja rajzunk síkjában. Ez esetben az e lappal párhuzamos DEF lap rajzunk síkjával párhuzamos és az oktaéder ortogonális vetületét rajzunk síkjában a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az AB és DE élek normál transzverzálisa MN most nyilván merőleges rajzunk síkjára és így vetülete ponttá fajul. Ha a vetületben AB és EF metszéspontját P-vel jelöljük, akkor a szögeket tekintve triviális, hogy $AM = ME = MP = PE = PB$, vagyis az M pont harmadolja az AB élt.

Az MN távolság nem egyéb, mint az $[ABC]$ sík távolsága a vele párhuzamos $[DEF]$ síktól, vagyis pl. a D pont távolsága a képsíktól. Utóbbi olyan derékszögű háromszög befogója, melynek átfogója a térben az $ACD_{\triangle}$ magassága, és másik befogója ennek az átfogónak DQ vetülete. DQ az oktaéder vetülete köré írt kör sugarának a fele és így harmadrésze a QB lapmagasságnak.

Tehát

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{8a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Eördögh László (Bp., VIII., Apáczai Csere g. IV. o. t.)