

I. megoldás: A baloldalon szereplő gyök alatti mennyiség az $\alpha = 90^\circ \pm k \cdot 360^\circ$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) értékek kivételével mindenütt értelmezve van és értéke seholsem negatív.

Ha a gyököt pozitív előjellel tekintjük, akkor az azonosság csak azokra az α értékekre állhat fenn, amelyekre $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ az I. és III. szögnyegyedben van.

A baloldalt átalakítjuk:

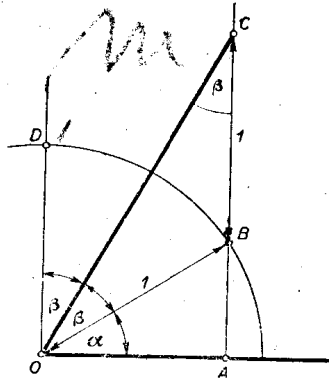
$$(1) \quad \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin 90^\circ + \sin \alpha}{\sin 90^\circ - \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Mivel az $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ \pm k \cdot 180^\circ$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) értékek kizártak, az (1) alatti kifejezés:

$$\sqrt{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ha $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ a II. ill. IV. szögnyegyedben van, akkor a négyzetgyökök előjelei megfelelőképpen veendőek.

II. megoldás: Az egységsugarú körben (l. ábrát), legyen az $\angle AOB = \alpha$, $OB = 1$, $AB = \sin \alpha$, $OA = \cos \alpha$.



Az AB távolságot hosszabbítsuk meg B -n túl $BC = 1$ -gyel. Az $\angle OCB$ -et β -val jelölve, a $\angle BOC$ is egyenlő β -val, mert az OBC háromszög egyenlőszárú. A $\angle COD = \beta$, mint váltószög, ha $DO \perp OA$. Tehát $2\beta + \alpha = 90^\circ$, vagyis

$$\beta = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \text{és így} \quad \alpha + \beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Az OAC derékszögű háromszögben

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + AB}{OA} = \\ &= \frac{1 + AB}{\sqrt{1 - AB^2}} = \sqrt{\frac{(1 + AB)^2}{(1 + AB)(1 - AB)}} = \sqrt{\frac{1 + AB}{1 - AB}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}. \end{aligned}$$

Ez a bizonyítás a többi térnyegyedre is kiterjeszhető.

Biczó Géza (Bp., II., Rákóczi g. III. o. t.)

III. megoldás:

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos(90^\circ + \alpha)}{1 + \cos(90^\circ - \alpha)}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}.$$

Természetesen itt is ki kell zárni az $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) értékeket és a gyök előjelét kellőképpen venni.

Quittner Pál (Bp., I., Petőfi g. III. o. t.)