I. megoldás:

a) Mivel a nevező

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$$

minden valós x-re, azért a függvény az egész számegyenesen értelmezve van.

b) Határozzuk meg a görbe zéró-helyeit, vagyis azokat a pontokat, amelyekben a görbe az x-tengelyt metszi.

$y=0$, ha a számláló

$$x^2-x-1=0,$$

vagyis, ha

$$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad \text{és}\quad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(A nevező, mint láttuk, sohasem egyenlő 0-val.)

c) $x=0$ esetén $y=-1$. Ha $x\neq 0$, akkor függvényünk írható ilyen alakban

$$y=1-2\frac{x+1}{x^2+x+1}=1-2\frac{1+\frac{1}{x}}{x+1+\frac{1}{x}}.$$

Ha itt x abszolút értéke elég nagy (és mondjuk 1-nél mindenesetre nagyobb), akkor a tört számlálójának abszolút értéke mindenesetre kisebb, mint pl. 2, míg a nevező abszolút értéke tetszőlegesen nagy lesz. A tört abszolút értéke tehát tetszőlegesen kicsi lesz. Így tehát, ha x abszolút értéke minden határon túlnő, akkor y tetszőleges pontossággal megközelíti az 1 értéket. Egyébként az $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ tört pozitív, ha $x>-1$, negatív, ha $x<-1$, így (a »-2« szorzóra is figyelve) negatív x-ekre felülről, pozitívokra alulról közeledik a függvény görbéje az $y=1$ egyeneshez (aszimptotához).

d) Határozzuk meg a függvény szélső értékeit. E célból x-et fejezzük ki y-nal. Mivel a nevező sohasem 0, azért

$$y(x^2+x+1)=x^2y+xy+y=x^2-x-1,$$

vagyis

$$x^2(y-1)+x(y+1)+(y+1)=0,$$

amiből

$$x=\frac{-(y+1)\pm\sqrt{(y+1)^2-4(y^2-1)}}{2(y-1)}$$

x csak akkor valós, ha a diszkrimináns

$$(y+1)^2-4(y^2-1)=-3y^2+2y+5\geq 0. \tag{1}$$

Mivel a

$$-3y^2+2y+5=0$$

egyenlet gyökei

$$y_1=-1,\quad \text{és}\quad y_2=\frac{5}{3},$$

azért az (1) alatti egyenlőtlenség teljesül, ha

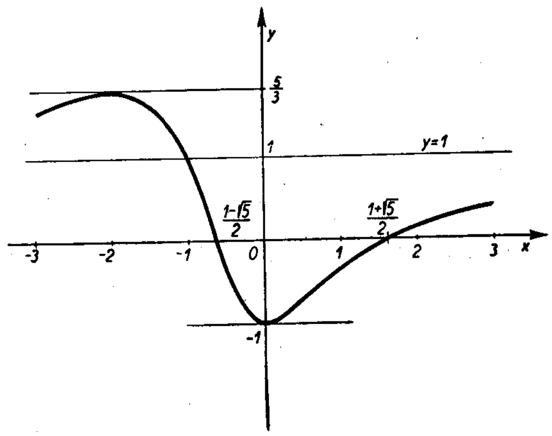
$$-1\leq y\leq\frac{5}{3}.$$

Tehát y szélső értékei:

$$y_{\min}=-1\quad \text{amikor}\quad x=0,$$
$$y_{\max}=\frac{5}{3},\quad \text{amikor}\quad x=-2.$$

Behelyettesítéssel nyerjük a következő értéktáblázatot

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{11}{7}$	$\frac{5}{3}$	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{13}$



Bauer Károly (Pécs, Bányaipari techn. IV. o. t.)

II. megoldás:
A szélső értékeket a következőképpen is meghatározhatjuk. Alakítsuk át a függvényt:

$$y=\frac{x^2-x-1}{x^2+x+1}=1-2\frac{x+1}{x(x+1)+1}=1-\frac{2}{x+\frac{2}{x+1}}=$$
$$=1-\frac{2}{(x+1)+\frac{1}{x+1}-1}.$$

y akkor minimális, ha a második tag maximális, vagyis ha a második tag nevezője a nem negatív számok körében minimális. De $x+1+\frac{1}{x+1}$ a nem negatív számok körében minimális, ha $x+1=\frac{1}{x+1}=1$, vagyis $x=0$, amely esetben $y_{\min}=-1$.

y maximális, ha a második tag minimális, vagyis a nevező a negatív számok körében maximális. De $x+1+\frac{1}{x+1}$ a negatív számok körében maximális, ha $x+1=\frac{1}{x+1}=-1$, amiből $x=-2$ és $y_{\max}=\frac{5}{3}$.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

III. megoldás:
A szélső érték meghatározásának egy harmadik módja a következő:

$$y=\frac{2x^2}{x^2+x+1}-1=\frac{2}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1=\frac{2}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-1.$$

y akkor maximális, ha az első tag maximális, vagyis az első tag nevezője minimális. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2$ egy sohasem negatív mennyiség, amely akkor minimális, ha értéke 0, vagyis ha $x=-2$, amikor is $y_{\max}=\frac{5}{3}$.

y minimális, ha az első tag nevezője maximális, vagyis $\frac{1}{x}$ maximális. Utóbbi minden határon túlnő, ha x 0-hoz közeledik; így ekkor a tört értéke is (mely mindig pozitív) 0-hoz közeledik, tehát $y_{\min}=-1$.

Vigassy József (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)