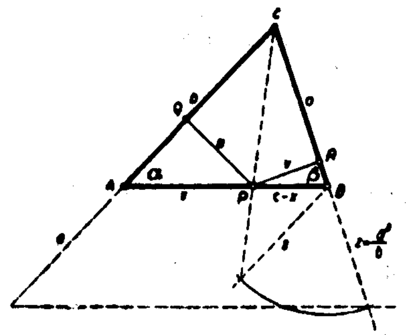
I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ha $AP = x$, akkor $BP = c - x$, és a két merőleges $u = x \sin\alpha$, $v = (c-x)\sin\beta$.

Tehát az

$$u^2 + v^2 = x^2 \sin^2\alpha + (c-x)^2 \sin^2\beta = x^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - 2cx\sin^2\beta + c^2\sin^2\beta$$

másodfokú függvény minimumát keressük.

Ismeretes, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ függvény szélső értékét az $x = -\dfrac{b}{a}$ helyen veszi fel, és e szélső érték minimum, ha $a > 0$.

Tehát jelen esetben – mivel $\sin^2\alpha + \sin^2\beta > 0$ – minimum van az

$$x = \frac{c\sin^2\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$$

helyen, amikor

$$c - x = \frac{c\,\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta},$$

és így a sinustétel felhasználásával

$$AP : PB = x : (c-x) = \sin^2\beta : \sin^2\alpha = b^2 : a^2.$$

Deseő Zoltán (Bp. X., I. László g. IV. o. t.)

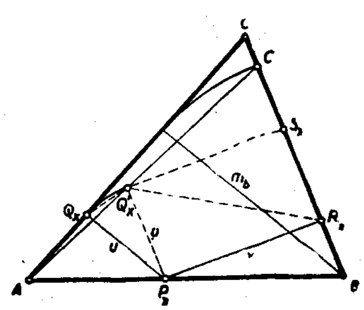
Megjegyzés: A kiszámított arány alapján a P pont könnyen meg is szerkeszthető. Pl.

$$b^2 : a^2 = b : \frac{a^2}{b} = b : z, \quad \text{ahol} \quad b : a = a : z.$$

A z szakasz tehát negyedik arányosként nyerhető. A szerkesztés az 1. ábráról leolvasható.

II. megoldás: Számítás nélkül tisztán geometriai meggondolásokkal is megszerkeszthető a P pont.

Vegyünk fel az AB oldalán egy tetszőleges P_x pontot. A P_x-ből bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek Q_x és R_x (2. ábra).



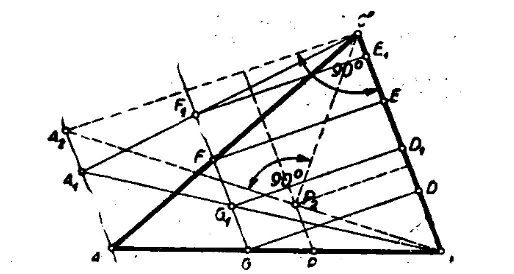
2. ábra

A $P_xQ_x = u$ szakaszt forgassuk el P_x körül a $P_xQ'_x$ helyzetbe, ahol $P_xQ'_x \perp P_xR_x$.

Ha P_x végigfut az AB oldalon, akkor a $P_xQ_xQ'_x$ egyenlő szárú háromszögek mind hasonlóak és perspektív helyzetűek az A centrumra nézve, vagyis a Q'_x pontok mértani helye az AQ'_x egyenes, amely a BC oldalt a C' pontban metszi, ahol BC' nyilván nem egyéb, mint a B-ből kiinduló m_b magasság elforgatása $P \equiv B$ körül. Pythagoras tétele alapján $u^2 + v^2 = Q'^{}_xR^2_x$. Q'_xR_x pedig a $P_xQ'_xS_xR_x$ téglalap átlója, amely téglalap az $ABC'\triangle$-be van írva oly módon, hogy az R_xS_x oldalának hordozója a háromszög BC' oldala.

Problémánk most már így fogalmazható: Az $ABC'\triangle$-be írt téglalapok körül (amelyeknek egyik oldala a BC' oldal egy szakaszát képezik), melyiknek az átlója a legkisebb?

Hogy ezt meghatározzuk, toljuk el az A csúcspontot a BC' oldallal párhuzamosan egy tetszőleges A_1-be (3. ábra).



3. ábra

Az $ABC'\triangle$-be írt $DEFG$ téglalap akkor eltolódik az $A_1CB\triangle$-be írt $D_1E_1F_1G_1$ téglalapba, amely egybevágó az előbbi téglalappal, mert $G_1F_1 : BC' = A_1G_1 : A_1B = AG : AB = GF : BC'$, és így

$$G_1F_1 = GF.$$

Ha az A pontot az A_2 pontba toljuk, ahol $A_2C' \perp C'B$-re, akkor problémánk így hangzik: A $BC'A_2$ derékszögű háromszögbe írt téglalapok közül, amelyeknek egyik csúcspontja a C' pont, melyiknek átlója minimális? Az A_2B átfogón lévő P_2 téglalapcsúcspontnak a C' csúcsponttól való távolsága a téglalap egyik átlója, amely nyilván akkor minimális, ha $C'P_2 \perp A_2B$.

A szerkesztés menete tehát: Megszerkesztjük a BC oldalon a C' pontot $BC' = m_b$ alapján (2. ábra). A C' pontban merőlegest emelünk a BC' oldalra és rámérjük a $C'A_2 = m_a$ távolságot (3. ábra). C'-ből merőlegest bocsátunk az A_2B átfogóra, amelynek talppontja P_2. A P_2-n át BC'-vel rajzolt párhuzamos metszi ki az AB oldalból a keresett P pontot.

Szendrei István (Kunszentmiklós, Damjanich g. III. o. t.)

Megjegyzés: Könnyen meggyőződhetünk, hogy az így megszerkesztett P pont megfelel az I. megoldásban nyert P pontnak. Ugyanis az $A_2C'B$ derékszögű háromszögben (3. ábra), ismert tétel alapján

$$A_2C'^2 = m_a^2 = A_2B \cdot A_2P_2$$
$$BC'^2 = m_b^2 = A_2B \cdot P_2B.$$

Tehát

$$\frac{m_a^2}{m_b^2} = \frac{A_2P_2}{P_2B} = \frac{AP}{PB}.$$

A területképlet alapján azonban $\dfrac{m_a}{m_b} = \dfrac{b}{a}$, és így $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{b^2}{a^2}$, ami egyezik az I. megoldásban nyert eredménnyel.