**I. megoldás:** $\beta$ és $\gamma$ közül egyik nem lehet derékszög, mert ez ellentmond a feltételnek, $\beta=\gamma=90^\circ$ pedig éppúgy ki van zárva, mint a $0^\circ$ ill. $180^\circ$, mivel $\beta$ és $\gamma$ egy háromszög szögei. Tehát $\beta$ és $\gamma$ sinusa és cosinusa 0-tól különböző.

A $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ és $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$ értékeket helyettesítve:

$$\frac{\sin\beta\,\sin^2\gamma}{\cos\beta}=\frac{\sin\gamma\,\sin^2\beta}{\cos\gamma}.$$

Mivel $\sin\beta\,\sin\gamma\neq 0$, azért egyszerűsítve

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}=\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}, \tag{1}$$

vagyis $2\cos\beta\,\cos\gamma$-val szorozva

$$2\sin\gamma\,\cos\gamma=2\sin\beta\,\cos\beta,\quad \text{azaz}\quad \sin 2\gamma=\sin 2\beta.$$

Ebből kővetkezik, hogy
vagy

$$\beta=\gamma,$$

amely esetben a *háromszög egyenlőszárú*,
vagy

$$2\gamma=180^\circ-2\beta,$$

azaz

$$\beta+\gamma=90^\circ$$

és így $\alpha=90^\circ$, vagyis a *háromszög derékszögű.*

*Uray László* (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)

**II. megoldás:** Az I. megoldás (1) alatti egyenlősége így is írható:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

A sinus-tétel értelmében $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\dfrac{c}{b}$, a cosinus-tétel szerint pedig $\cos\beta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, és $\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, amely értékeket (2)-be helyettesítve

$$\frac{c}{b}=\frac{b\,(a^2+c^2-b^2)}{c\,(a^2+b^2-c^2)},$$

vagyis

$$a^2c^2+b^2c^2-c^4=a^2b^2+b^2c^2-b^4,$$

amiből

$$b^4-c^4=a^2(b^2-c^2),$$

azaz

$$(b^2-c^2)\left[\left(b^2+c^2\right)-a^2\right]=0.$$

Ha az első tényező 0, akkor $b=c$, vagyis a *háromszög egyenlőszárú.*

Ha a második tényező 0, vagyis $b^2+c^2=a^2$, akkor a Pythagoras-tétel megfordítása alapján a *háromszög derékszögű.*

*Roboz Ágnes* (Bp. VI., Varga Katalin lg. III. o.)