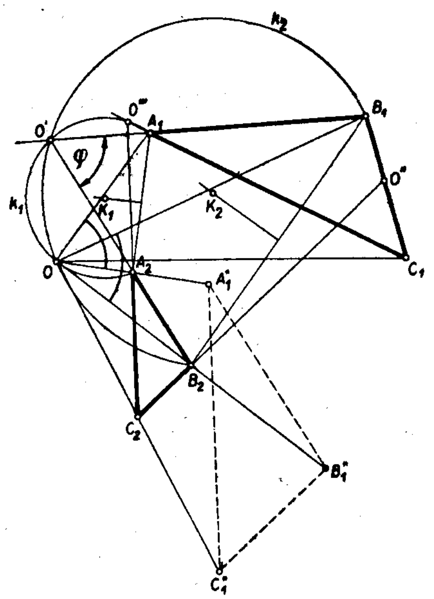
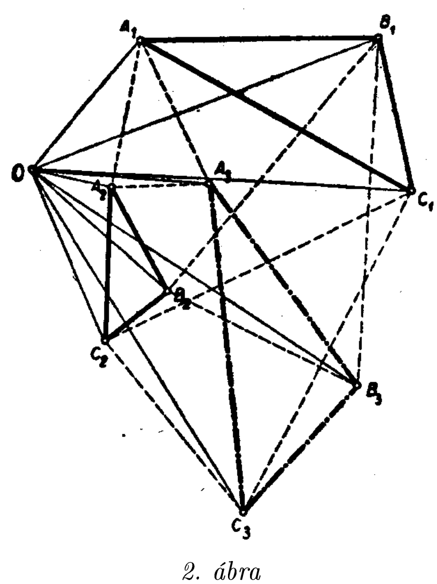
Először megmutatjuk, hogy bármely két hasonló és megegyező körüljárású háromszöghöz található a síkban olyan O pont, amelyből a két háromszög forgatva-nyújtással egymásba átvihető.

Ha a megfelelő oldalak már az alaphelyzetben párhuzamosak (vagyis a két háromszög »perspektív«helyzetű), akkor a külső hasonlósági centrum a keresett O pont és forgatásra nincs szükség. Ha a perspektív helyzet mellett még a háromszögek egybevágósága is fennáll, akkor O a végtelenbe kerül, vagyis a két háromszög párhuzamos eltolással vihető át egymásba. Ezekben a speciális esetekben tételünk bizonyítása triviális.



1. ábra

Általában azonban a megfelelő oldalak metszéspontjai O', O'', O''' (1. ábra) a végesben vannak és – mivel a két adott háromszög megfelelő szögei egyenlők – 2–2 megfelelő oldal szöge is mindenkor egyenlő. Ha ezt a szöget φ-vel jelöljük, akkor nyilván φ szöggel kell majd pl. az $A_1B_1C_1\triangle$-et elforgatni az $A_1^*B_1^*C_1$ helyzetbe, hogy a két háromszög perspektív helyzetbe kerüljön egy O pontra nézve, amely O pontból való $\dfrac{OA_2}{OA_1^*}=\dfrac{OB_2}{OB_1^*}=\dfrac{OC_2}{OC_1^*}$ arányú kicsinyítés (ill. nagyítás) célhoz vezet. Tehát a keresett O pontból az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 szakaszok az előbb meghatározott φ szög alatt látszanak. Megoldás mindig van, mert az A_1 A_2 és B_1 B_2 fölé rajzolt látókörívek (k_1 és k_2) egyik közös pontja mindenesetre az O' pont, tehát kell hogy legyen még egy közös O pontjuk. Ha az így megszerkesztett O pont körül az $A_1B_1C_1\triangle$-et φ szöggel elforgatjuk az $A_1^*B_1^*C_1^*$ helyzetbe, akkor a $C_1OC_1^*\sphericalangle=\varphi$ és az előbbiek alapján az $A_1^*B_1^*C_1^*$ és az $A_2B_2C_2$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak. Tehát e két háromszög perspektív helyzetben van, mely perspektivitásnak centruma az $A_1^*A_2$ és $B_1^*B_2$ egyenesek metszéspontja O, de akkor szükségképpen $C_1^*C_2$ egyenes átmegy az O ponton, tehát a $C_1OC_2\sphericalangle$ is egyenlő φ-vel, vagyis a C_1C_2 fölé rajzolt – φ-szögnek megfelelő – látókörív is átmegy az O ponton.



2. ábra

Ha megszerkesztjük a feladat szerint az $A_3B_3C_3\triangle$-et (2. ábra), akkor az előbbiek alapján

$$OA_1A_2\triangle \sim OB_1B_2\triangle \sim OC_1C_2\triangle$$

a szerkesztés szerint

$$A_1A_2A_3\triangle \sim B_1B_2B_3\triangle \sim C_1C_2C_3\triangle$$

és így

$$OA_1A_3A_2 \text{ négyszög } \sim OB_1B_3B_2 \sim OC_1C_3C_2 \text{ négyszög},$$

és a körüljárás iránya is megegyező.

De ebből következik, hogy a másik átló által lemetszett háromszögek is hasonlók és megegyező körüljárásúak, vagyis

$$OA_1A_3\triangle \sim OB_1B_3\triangle \sim OC_1C_3\triangle,$$

ami viszont azt jelenti, hogy $A_3B_3C_3\triangle$ forgatva-nyújtással keletkezik az $A_1B_1C_1$-ből, tehát hozzá hasonló és egyező körüljárású.

Vigassy József (Bp., I., Petőfi g. IV. o. t.)