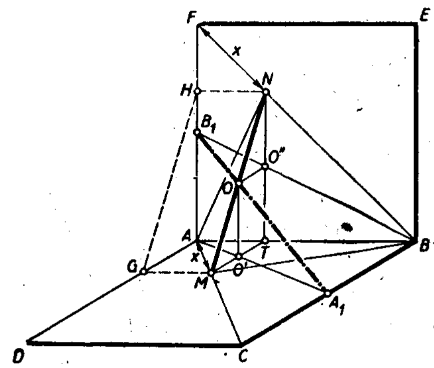
1. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Legyen $MG \perp AD$ és $NH \perp AF$, akkor AGM és FHN egyenlőszárú derékszögű háromszögek, amelyeknek átfogója (x) egyenlő. Tehát

$$AGM_\Delta \simeq FHN_\Delta,$$

és így x-től függetlenül mindig

$$MG = NH,$$

vagyis $MN \parallel GH$. Ebből viszont következik, mivel GH állandóan az ADF síkban mozog, hogy MN állandóan párhuzamos az ADF síkkal. (Egy egyenes párhuzamos egy síkkal, ha egy a síkban fekvő egyenessel párhuzamos.)

Mivel $AB \perp$ az ADF síkra (mert e síknak két különböző irányú egyenesére AD- és AF-re merőleges), azért az ADF síkkal párhuzamos MN is állandóan merőleges AB-re. Az MN-en átmenő AB-re merőleges sík messe az AB-t a T pontban. Tehát $MT \perp AB$ és $NT \perp AB$

Az MN távolság O felezőpontjának merőleges vetülete az $ABCD$ síkon szükségképpen MT felezőpontja O', és O merőleges vetülete az $ABEF$ négyzetlapra O'' felezi az NT távolságot. (OO' ill. OO'' az MTN derékszögű háromszög középvonalai.) Tehát, ha x változik 0-tól $a\sqrt{2}$-ig, az O felezőpont leír a térben egy olyan mértani helyet, amelynek merőleges vetülete az $ABCD$ négyzetlapon az O' pont által befutott AA_1 súlyvonala az ABC_Δ-nek, míg az $ABEF$ síkon levő O'' vetület leírja a BB_1 súlyvonalát a BAF_Δ-nek. Ebből következik, hogy O pontok mértani helye a B_1A_1 távolság, ahol B_1 az AF négyzetoldal, A_1 a BC négyzetoldal felezőpontja.

2. Pythagoras tételének felhasználásával

$$MN^2 = MT^2 + NT^2 = \left(\frac{AM}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{BN}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2a^2 - 2ax\sqrt{2} + x^2}{2} = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2.$$

Ennek a függvénynek ábrája egy parabolaív a $0 \leq x \leq a\sqrt{2}$ intervallumban. E parabolaív végpontjai: $(0, a^2)$ és $(\alpha\sqrt{2}, a^2)$ pontok.

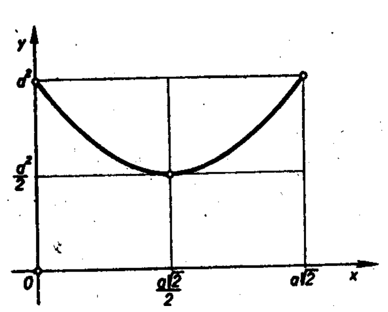
MN^2 így is írható:

$$MN^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2},$$

amiből kitűnik, hogy MN^2, és vele együtt MN értéke minimális, ha a sohasem negatív első tag 0, vagyis, ha

$$x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}, \text{ mikor is } MN^2 = \frac{\alpha^2}{2}, \text{ azaz } MN = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a parabola főtengelye az $x = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ egyenes, és csúcspontja az $\left(\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\alpha^2}{2}\right)$ pont (2. ábra).



2. ábra

3. Mint láttuk, MN minimális, ha $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, vagyis M és N négyzetközép-pontok, és MN minimális értéke $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tehát ebben az esetben az AMN és a BNM háromszögek egyenlőoldalúak és így kimondhatjuk: ha MN minimális, akkor $AMN\sphericalangle=\alpha=60^\circ$, és $BNM\sphericalangle=\beta=60^\circ$.

4. Mivel $TA=TM$ is $TB=TN$, azért az

$$ATN_\Delta\simeq MTN_\Delta\simeq MTB_\Delta,$$

mert mindhárom háromszög derékszögű és befogóik egyenlők. Ebből következik az átfogók egyenlősége, vagyis az MNA_Δ és az NMB_Δ egyenlőszárú, AM, ill. BN alappal. Tehát

$$\cos\alpha=\frac{AM}{2\ MN}=\frac{x}{2\sqrt{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}},$$

$$\text{és}\ \ \cos\beta=\frac{BN}{2MN}=\frac{a\sqrt{2}-x}{2\sqrt{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}}.$$

Ebből kitűnik, hogy az $\alpha=\beta=90^\circ$ feltevés arra vezetne, hogy x és $a\sqrt{2}-x$ egyidejűleg 0 volna, ami nyilván lehetetlen, tehát tényleg MN nem lehet egyszerre mindkét átlóra merőleges.

5. $x=\frac{a}{2}$ esetén

$$\cos\alpha=\frac{a}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-8\sqrt{2}+16}}=\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{3{,}172}},$$

amiből

$$\lg\ \cos\alpha=9{,}5305-10,$$

és így

$$\alpha=70^\circ10'.$$

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. I. o. t.)