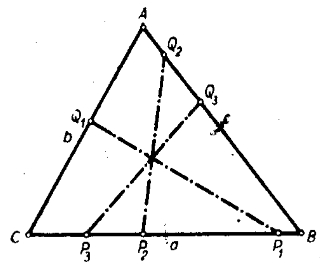


1. ábra

Képzeljük a feladatot megoldottnak pl. az 1. ábrában P_1Q_1. A CP_1 távolságot x-szel, a CQ_1 távolságot y-nal jelölve, a feladat értelmében

$$x + y = s, \tag{1}$$

ahol s a háromszög fél kerülete,
és

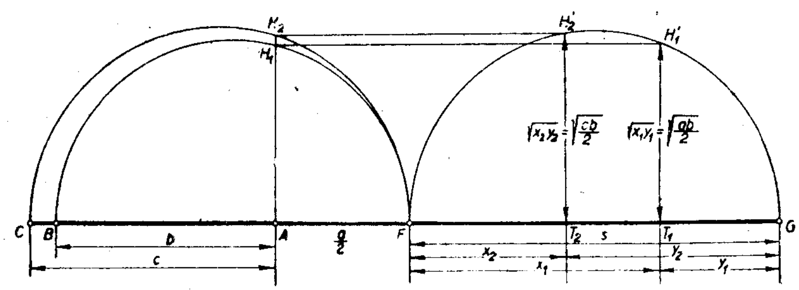
$$\frac{xy\sin\gamma}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{ab\sin\gamma}{2},$$

vagyis (mivel $\sin\gamma \neq 0$)

$$xy = \frac{ab}{2}. \tag{2}$$

Tehát a feladat most már abból áll, hogy szerkesszünk olyan x, y távolságokat, amelyeknek összege s és mértani középarányosa megegyezik a és $\frac{b}{2}$ vagy b és $\frac{a}{2}$ mértani középarányosával.

A szerkesztés menete: Megszerkesztjük b és $\frac{a}{2}$ mértani középarányosát: $\sqrt{\frac{ab}{c}} = AH_1$-et (2. ábra).



2. ábra

Rajzolunk egy $FG = s$ átmérőjű félkört, és húzzunk az átmérővel párhuzamos egyenest, melynek távolsága az átmérőtől AH_1. Ez a párhuzamos metszi ki a félkörből a H_1' pontot, amelynek vetülete az átmérőn (T_1) osztja fel az s átmérőt a keresett x és y részekre. $\left(\text{A 2. ábrában } \sqrt{x_1y_1} = H_1'T_1 = AH_1 = \sqrt{\frac{ab}{2}}\right)$.

A megoldhatóság feltételei: (1) és (2)-ből x és y-t kiszámítva, nyerjük hogy

$$x(s-x) = \frac{ab}{2}, \qquad \text{vagyis} \qquad x^2 - sx + \frac{ab}{2} = 0,$$

amiből

$$x_1 = y_2 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 2ab}}{2} \qquad \text{és} \qquad x_2 = y_1 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 2ab}}{2}$$

Ahhoz, hogy a feladat az a és $b (a > b)$ oldalakon megoldható legyen, szükséges és elégséges, hogy a gyökök valósak legyenek és azonkívül a nagyobbik gyök rámérhető legyen a nagyobbik oldalra, a kisebbik gyök pedig a kisebbik oldalra.

Elsősorban szükséges tehát, hogy a diszkrimináns ne legyen negatív. Tehát $s^2 \geq 2ab$, vagyis

$$4s^2 = (2s)^2 = (a + b + c)^2 \geq 8ab. \tag{3}$$

Továbbá teljesülnie kell, hogy

$$\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{s^2-2ab}}{2}\leq a, \tag{4}$$

és

$$\frac{s}{2}-\frac{\sqrt{s^2-2ab}}{2}\leq b. \tag{5}$$

1. Bebizonyítjuk, hogy $a>c>b$ esetén e feltételek mindig teljesülnek.

(3) teljesül, mert ez esetben a baloldal akkor a legkisebb, ha c a legkisebb, vagyis $c=b$, de

$$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2=a^2-4ab+4b^2+8ab=8ab+(a-2b)^2\geq 8ab,$$

ami nyilván igaz.

(4) így írható:

$$\sqrt{s^2-2ab}\leq 2a-s.$$

Mivel a nem a legkisebb oldal, azért a jobboldal pozitív és így négyzetre emelve

$$s^2-2ab\leq 4a^2-4as+s^2,$$

amiből

$$c\leq a,$$

ami feltétel szerint igaz, vagyis (4) teljesül.

(5) is teljesül, mert ha $b>\frac{s}{2}$, akkor (5) nyilvánvaló, ha pedig $b<\frac{s}{2}$ akkor (5) így írható:

$$\frac{\sqrt{s^2-2ab}}{2}\geq\frac{s}{2}-b,$$

ahol a jobboldal pozitív, és négyzetre emelés után nyerjük, hogy

$$c\geq b,$$

ami mindenképpen igaz.

Viszont

$$\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{s^2-2ab}}{2}\leq b \tag{6}$$

nem teljesül, mert ha $b<\frac{s}{2}$, akkor (6) nem teljesülése nyilvánvaló, ha pedig $b\geq\frac{s}{2}$, akkor (6) így is írható

$$\sqrt{s^2-2ab}<2b-s,$$

ahol a jobboldal pozitív, és négyzetre emelés után nyerjük

$$c\leq b,$$

ami ellentmond a feltevésnek.

Tehát a *legnagyobb és legkisebb oldalon mindig van* 1 *és csakis* 1 *megoldás:* a két gyök ilyenkor *mindig* valós, és a nagyobbik gyök rámérhető a nagyobbik oldalra (és csakis oda) a kisebbik gyök pedig rámérhető a kisebbik oldalra. (Az 1. ábrán $P_1Q_1\cdot CP_1=x_1$, $CQ_1=y_1$).

2. Az előbbiekben láttuk, hogy $a>b$ feltétel mellett (4) csak úgy teljesülhet, ha $c\leq a$, ami azt jelenti, hogy az a és b oldalon, csak úgy lehet megoldás, ha a-nál nagyobb oldala nincs a háromszögnek, más szóval: *a két legkisebb oldalon soha sincs megoldás.*

3. $a>b>c$ esetén is lehet az a, b, azaz a két legnagyobb oldalon megoldás, ha a (3), (4) és (5) alatti feltételek teljesülnek, de ez esetben – mint azt az 1. pontban láttuk – (6) is teljesül, vagyis a nagyobbik gyök a kisebbik oldalra is rámérhető.

Tehát *lehet a két legnagyobb oldalon* 2 *megoldás.* (Az 1. ábrán P_2Q_2 és P_3Q_3. $BP_2=BQ_3=x_2$, $BP_3=BQ_2=y_2$). E két megoldásban a háromszögrészek mindig egybevágóak, de a négyszögrészek nem.

Egyenlő oldalú háromszög esetén $(2s=3a)$ a gyökök a és $\frac{a}{2}$, vagyis a 3 szimmetria-tengely oldja meg a feladatot. Egyenlő szárú háromszög esetén (alap $\lesseqgtr$ szár) szimmetrikus megoldások lépnek fel; ezeknek taglalását az olvasóra bízzuk.