I. megoldás: Legyen az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

A $P(x_0,\ y_0)$ pontban az érintő egyenlete

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Ezen érintőnek az $A(-a,\ 0)$ és $B(a,\ 0)$ csúcspontokban emelt csúcsérintőkkel való metszéspontja:

$$M\left(-a, \frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x^0}{a}\right)\right),\quad \text{ill.}\quad N\left(a, \frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\right)$$

Az $F_1(-c,\ 0)$ fókusznak összekötése M-mel az F_1M egyenes, amelynek iránytényezője

$$m=-\frac{\dfrac{b^2}{y_0}\left(1+\dfrac{x_0}{a}\right)}{a-c}$$

Hasonlóképpen F_1N iránytényezője

$$n=\frac{\dfrac{b^2}{y_0}\left(1-\dfrac{x_0}{a}\right)}{a+c}$$

Az iránytényezők szorzata

$$mn=-\frac{\left(\dfrac{b^2}{y_0}\right)^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}{a^2-c^2}$$

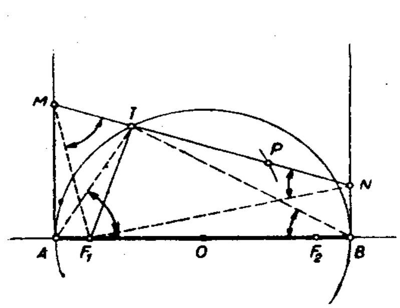
de $a^2-c^2=b^2$, és mivel P rajta van az ellipszisen, azért $1-\dfrac{x_0^2}{a^2}=\dfrac{y_0^2}{b^2}$, és így

$$mn=-\frac{\dfrac{b^4}{y_0^2}\cdot\dfrac{y_0^2}{b^2}}{b^2}=-1.$$

Tehát tényleg F_1M és F_1N derékszöget zár be.

Természetesen teljesen hasonlóképpen bizonyítható tételünk F_2-re nézve is.

Deseő Zoltán (Bp., X., I. László g. III. o. t.)



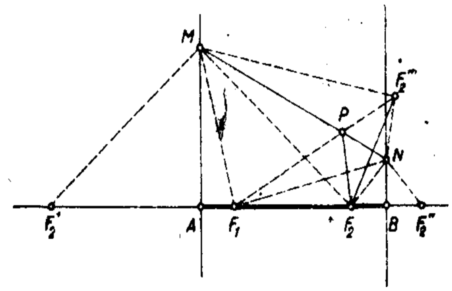
1. ábra

II. megoldás: A jelölést az 1. ábra mutatja. Az F_1 fókuszból a P pontban érintő MN egyenesre bocsátott merőleges talppontja T, amely rajta van az ellipszis főkörén. Tehát ATB derékszögű háromszög, amelynek derékszöge a T csúcsnál van. Ebből következik továbbá, hogy az $AFTM$ és $BFTN$ négyszögekben $2-2$ szembenfekvő szög: $A\sphericalangle$ és $T\sphericalangle$, ill. $B\sphericalangle$ és $T\sphericalangle$ derékszög, vagyis e négyszögek húrnégyszögek, s így az előbbiben az F_1T közös íven nyugvó $F_1AT\sphericalangle$ és $F_1MT\sphericalangle$, az utóbbiban pedig az $F_1BT\sphericalangle$ és $F_1NT\sphericalangle$ egyenlő. Ebből viszont következik, hogy az

$$MF_1N_\triangle\sim ATB_\triangle,$$

vagyis az $MF_1N\sphericalangle$ derékszög.

Csáki Endre (Győr, Révai g.)



2. ábra

III. megoldás: A jelölést a 2. ábra mutatja. Legyen az F_2 fókusz tükörképe a két csúcsérintőre vonatkozóan F_2' és F_2'', továbbá az MN érintőre nézve: F_2'''. A tükrözés miatt

$$NF_2'' = NF_2 = NF_2''',$$

és

$$F_1F_2'' = AB = F_1F_2''',$$

is így 3 oldal egyenlősége miatt

$$F_1NF''_{2\triangle} \cong F_1NF'''_{2\triangle},$$

amiből következik, hogy F_1N az $F_1F_2P_\triangle$ $F_1\sphericalangle$-ének belső szögfelezője.

Hasonlóképpen a tükrözés alapján

$$MF_2' = MF_2 = MF_2''',$$

és

$$F_1F_2' = AB = F_1F_2''',$$

és így a 3 oldal egyenlősége miatt

$$MF_1F'_{2\triangle} \cong MF_1F'''_{2\triangle},$$

amiből következik, hogy F_1M az $F_1F_2P_\triangle$ $F_1\sphericalangle$-ének külső szögfelezője, amely tudvalevőleg merőleges az F_1N belső szögfelezőre.

Schmidt Eligius (Bp., I., Fürst S. g. III. o. t.)