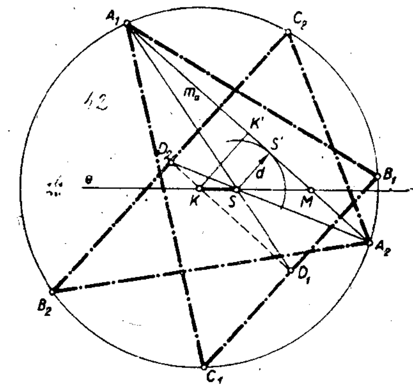
I. megoldás: Kiindulunk a KS távolságból, melynek hordozója az e Euler-féle egyenes. Ismeretes, hogy ezen az egyenesen van rajta a háromszög M magasságpontja, mégpedig a K, S, M sorrendben úgy, hogy $SM = 2KS$ (l. ábrát).



Ha az adott d távolság az m_a magasságvonalnak S-től való távolságát jelenti, akkor m_a nem egyéb, mint az M pontból az S köré d sugárral rajzolt kör érintője. (Elég egy érintőre szorítkozni, mert a második érintő csak az Euler-féle egyenesre nézve tükrös megoldásokat szolgáltat.) Az m_a egyenesnek metszéspontja a K köré rajzolt adott r sugarú körrel, a háromszög A csúcspontja (ill. a 2 megoldásnak megfelelő A_1 és A_2). Az A-val szemben fekvő a oldal D felezőpontja sokféleképpen szerkeszthető, legegyszerűbben és legpontosabban úgy, hogy D az AS súlyvonalon fekszik A, S, D sorrendben és $SD = \dfrac{AS}{2}$. D-n át m_a-ra bocsátott merőleges lesz az a oldal hordozója, amely kimetszi a körülírt körből a B és C csúcspontokat.

A megoldhatóság feltételei:

1. M-ből érintő húzható az S köré rajzolt d sugarú körhöz. Tehát

$$d \leq SM = 2KS \tag{1}$$

2. A körülírt kör metszi az érintőt, vagyis – ha K-nak merőleges vetületét az érintőn K'-vel jelöljük –

$$r \geq KK' = \frac{3}{2}d, \tag{2}$$

mert $KK' : d = KM : SM = 3 : 2$.

3. A D pont a körülírt kör belsejébe esik, vagyis

$$KD < r.$$

De

$$KD = \frac{AM}{2}, \qquad (KDS_\triangle \sim MAS_\triangle \quad \text{alapján})$$

és

$$AM = |AK' \pm MK'|,$$

ahol

$$AK' = \sqrt{KA^2 - KK'^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3d}{2}\right)^2},$$

és

$$MK' = \sqrt{MK^2 - KK'^2} = \sqrt{(3KS)^2 - \left(\frac{3d}{2}\right)^2}.$$

Tehát

$$KD = \frac{|AK' \pm MK'|}{2} = \frac{|\sqrt{4r^2 - 9d^2} \pm \sqrt{36KS^2 - 9d^2}|}{4} < r,$$

vagyis

$$\left|\sqrt{4r^2 - 9d^2} - 3\sqrt{4KS^2 - d^2}\right| < 4r, \tag{3}$$

illetőleg

$$\sqrt{4r^2 - 9d^2} + 3\sqrt{4KS^2 - d^2} < 4r. \tag{4}$$

Az (1) es (2) alatti feltételek azt mondják, hogy (3) és (4)-ben a gyökalatti mennyiségek nem lehetnek negatívak.

Tehát 2 megoldás van, ha (4) teljesül úgy, hogy mindkét gyökalatti mennyiség nagyobb nullánál. (L. ábrát.)

Ha (4) úgy teljesül, hogy a gyökalatti mennyiségek közül az egyik 0, a másik nagyobb nullánál, akkor 1 megoldás van.

1 megoldás van továbbá, ha (4) nem, de (3) teljesül úgy, hogy mindkét gyökalatti mennyiség nagyobb nullánál. (Ez az eset áll fenn, a feladattal kapcsolatban megadott konkrét példánál.)

Más esetben nincs megoldás.

Biczó Géza (Bp., II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Az a oldal hordozó egyenese többféleképpen szerkeszthető a D oldalfelező pont felhasználása nélkül is. A legegyszerűbb, ha felhasználjuk azt a tételt, mely szerint az M pont tükörképe az a oldalra nézve rajta van a körülírt körön, vagyis a nyert A_1 és A_2 pontok mindegyike M tükörképe a-ra vonatkozóan. Tehát az MA_1, ill. MA_2 távolságokat, merőlegesen felező egyenesek az a oldal hordozói.