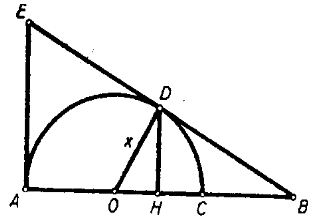
a) $BO = AB - AO = a - x$,

$$BD = \sqrt{BA \cdot BC} = \sqrt{a(a-2x)}.$$



Mivel az AEB és DOB derékszögű háromszögek B csúcsnál fekvő szöge közös azért

$$AEB_\triangle \sim DOB_\triangle,$$

és így

$$AE : AB = DO : DB,$$

amiből

$$AE = \frac{AB \cdot DO}{DB} = \frac{ax}{\sqrt{a(a-2x)}}.$$

Másrészt

$$BE : BA = BO : BD,$$

ahonnan

$$BE = \frac{BA \cdot BO}{BD} = \frac{a(a-x)}{\sqrt{a(a-2x)}}.$$

Az ODB derékszögű háromszögben

$$OD^2 = OH \cdot OB,$$

amiből

$$OH = \frac{OD^2}{OB} = \frac{x^2}{a-x}.$$

Végül

$$AH = AO + OH = x + \frac{x^2}{a-x} = \frac{ax}{a-x}.$$

b) A BE szakasz, AB körül forgatva, forgáskúpfelületet ír le, melynek felszíne

$$F_1 = AE \cdot \pi \cdot BE = \frac{ax}{\sqrt{a(a-2x)}} \cdot \frac{a(a-x)}{\sqrt{a(a-2x)}} \cdot \pi = \frac{ax(a-x)\pi}{a-2x}.$$

A megforgatott AD ív által leírt gömbsüveg felszíne

$$F_2 = 2OD \cdot \pi \cdot AH = 2x\pi \frac{ax}{a-x} = \frac{2ax^2\pi}{a-x}.$$

c) $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{2ax^2\pi}{a-x} \cdot \dfrac{a-2x}{ax(a-x)\pi} = \dfrac{2x(a-2x)}{(a-x)^2} = m.$

Tehát x-re a következő másodfokú egyenletet nyertük

$$(m+4)x^2 - 2a(m+1)x + ma^2 = 0.$$

Megjegyezzük, hogy értelmezésénél fogva, x csak 0 és $\dfrac{a}{2}$ közötti értékeket vehet fel.

Egyenletünk diszkriminánsa

$$D = 4a^2(m+1)^2 - 4ma^2(m+4) = 4a^2(1-2m),$$

amely akkor nem negatív, ha

$$1 - 2m \geq 0,$$

vagyis

$$m \leq \frac{1}{2}.$$

Ha tehát $0 < m < \frac{1}{2}$, akkor két különböző valós gyököt kapunk:

$$x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{1-2m}}{m+4} \cdot a,$$

amelyek tényleg pozitívek és $\frac{a}{2}$-nél kisebbek. (Csak $m = 0$ esetén volna $x_1 = \frac{1+1}{4}a = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{1-1}{4}a = 0\Big)$.

Ha $m = \frac{1}{2}$, akkor a két gyök egybeesik

$$x_1 = x_2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}}a = \frac{a}{3}.$$

Ha $m > \frac{1}{2}$, akkor nincs megoldás.

Grätzer György (Bp., VI., Kölcsey g. III. o. t.)