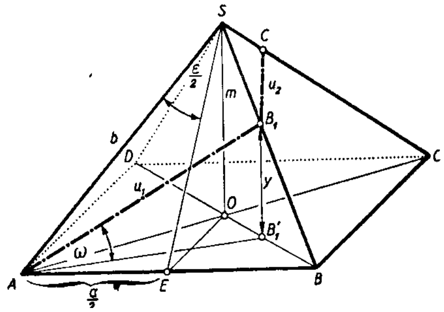
I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja Számítsuk ki először az A_1 pontig megtett u utat, amely a következő négy szakaszból tevődik össze; $AB_1 = u$, $B_1C_1 = u_2$, $C_1D_1 = u_3$, és $D_1A_1 = u_4$.



Ha a gúla oldalélét b-vel és az S csúcspontnál lévő élszöget ε-nal jelöljük. akkor az AB_1S derékszögű háromszögből

$$u_1 = b\sin\varepsilon, \qquad \text{és} \qquad SB_1 = b\cos\varepsilon.$$

Hasonlóképpen a B_1C_1S derékszögű háromszögből

$$u_2 = SB_1\sin\varepsilon = b\cos\varepsilon\cdot\sin\varepsilon = u_1\cos\varepsilon.$$

A B_1, C_1, D_1 pontokon áthaladó, az alaplappal párhuzamos (nívó-) síkok olyan részgúlákat metszenek le az eredeti piramisból, amelyek mind hasonlóak az eredeti gúlához. E hasonlóság alapján kimondhatjuk, hogy a 4 szakasz emelkedési szöge egyenlő, és továbbá $u_3 = u_2\cos\varepsilon$ és $u_4 = u_3$, vagyis a 4 útszakasz mértani sort alkot, amelynek első tagja $u_1 = b\sin\varepsilon$, és hányadosa $\cos\varepsilon$. Tehát

(1) $$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = b\sin\varepsilon\frac{1-\cos^4\varepsilon}{1-\cos\varepsilon} = b\sin\varepsilon(1+\cos\varepsilon)(1+\cos^2\varepsilon).$$

Mivel $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, vagyis $AO^2 = \dfrac{a^2}{2}$, azért a piramis oldaléle

$$SA = b = \sqrt{m^2 + AO^2} = \sqrt{140^2 + \frac{231^2}{2}} = 215{,}1.$$

Az AES derékszögű háromszögből $\sin\dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{a}{2b} = \dfrac{231}{430{,}2}$, amiből

$$\frac{\varepsilon}{2} = 32^\circ 28', \qquad \varepsilon = 64^\circ 56'.$$

Ezen értékeket (I)-be helyettesítve:

$$u = 215{,}1\cdot\sin 64^\circ 56'\cdot 1{,}424\cdot 1{,}180.$$

Az iskolai, 4-jegyű lg. táblával számolva az A_1 pontig megtett út

$$u \approx 327{,}4 \text{ méter.}$$

Az A_1 pont keresett magasságát x-szel, a B_1 pont B_1B_1' magasságát y-nal jelölve

(2) $$x : u = y : u_1,$$

továbbá a BOS derékszögű háromszögben

(3) $$y : m = B_1B : b,$$

ahol

$$B_1B = b - SB_1 = b - b\cos\varepsilon = b(1-\cos\varepsilon) = 2b\sin^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát (3)-ból

$$y = \frac{m\cdot B_1B}{b} = \frac{m\cdot 2b\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{b} = 2m\sin^2\frac{\varepsilon}{2},$$

és így (2)-ből

$$x = \frac{uy}{u_1} = \frac{u\cdot 2m\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{b\sin\varepsilon} = \frac{u\cdot 2m\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{b\cdot 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{um\sin\frac{\varepsilon}{2}}{b\cos\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{um\ \mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{b} =$$
$$= \frac{327{,}4\cdot 140\cdot\ \mathrm{tg}\,32^\circ 28'}{215{,}1},$$

ahonnan az A_1 pont keresett magassága

$$x \approx 135{,}6 \text{ méter}.$$

Az emelkedés szögét, a $B_1AB_1'\sphericalangle$-et ω-val jelölve

$$\sin\omega = \frac{y}{u_1} = \frac{x}{u} = \frac{135{,}6}{327{,}4},$$

ahonnan

$$\omega = 24^\circ 28'.$$

II. megoldás: A b és ε kiszámítása után kiszámíthatjuk először az A_1 pont x magasságát.

Ugyanis $x : m = AA_1 : b$, ahol $AA_1 = b - SA_1$ $SB_1 = b\cos\varepsilon$, $SC_1 = SB_1\cos\varepsilon = b\cos^2\varepsilon$, $SD_1 = SC_1\cos\varepsilon = b\cos^3\varepsilon$ és $SA_1 = b\cos^4\varepsilon$.

Tehát

$$x = \frac{m\cdot AA_1}{b} = \frac{m(b - b\cos^4\varepsilon)}{b} = m(1-\cos^4\varepsilon)(\approx 140\cdot 0{,}9678 \approx 135{,}7)$$

Az I. megoldás szerint

$$u_1 = b\sin\varepsilon, \qquad \text{és} \qquad y = 2m\sin^2\frac{\varepsilon}{2},$$

tehát

$$\sin\omega = \frac{y}{u_1} = \frac{2m\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{2b\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{m\ \mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon}{2}}{b}\left(\approx \frac{140\ \mathrm{tg}\ 32^\circ 28'}{215{,}1}\right),$$

ahonnan

$$\omega = 24^\circ 28'.$$

Mivel $\sin\omega = \dfrac{x}{u}$, azért

$$u = \frac{x}{\sin\omega}\left(\approx \frac{135{,}7}{\sin 24^\circ 28'} = 327{,}6\right).$$