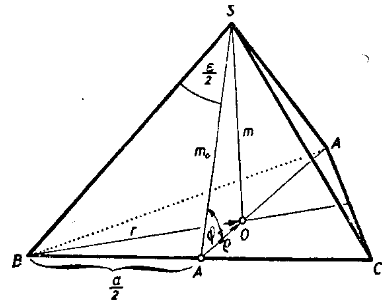
I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



$$OA_1 = \varrho = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6},\quad SA_1 = m_0 = \frac{\varrho}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi},$$

és igy

(1)
$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{a}{2m_0} = \frac{a}{2}\cdot\frac{6\cos\varphi}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot\cos\varphi$$

De

(2)
$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}},$$

vagyis

$$\frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon} = \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} = 3\cos^2\varphi,$$

amiből

$$\cos\varepsilon = \frac{1-3\cos^2\varphi}{1+3\cos^2\varphi}.$$

a) Ha $\varepsilon = 45^\circ$ akkor $\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
vagyis

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+3\cos^2\varphi) = 1-3\cos^2\varphi,$$

azaz

$$\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cos^2\varphi = 2-6\cos^2\varphi,$$

és így

$$(6+3\sqrt{2})\cos^2\varphi = 2-\sqrt{2},$$

amiből

$$\cos^2\varphi = \frac{2-\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{36-18} = \frac{18-12\sqrt{2}}{18} = \frac{3-\sqrt{2}}{3} \approx$$
$$\approx \frac{0{,}1716}{3} = 0{,}0572$$

Az iskolai 4-jegyű log. táblát használva

$$\varphi = 76^\circ 10'.$$

b) Ha $\varphi = 45^\circ$, akkor $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}$,
tehát

$$\cos\varepsilon = \frac{1-3\cdot\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2-3}{2+3} = -\frac{1}{5},$$

vagyis

$$\cos(180^\circ-\varepsilon) = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

amiből

$$180^\circ - \varepsilon = 78^\circ 28',$$

és így

$$\varepsilon = 101°32'$$

Keresztély Sándor (Miskolc, Földes Ferenc g. IV. o. t.)

II. megoldás: Ha az I. megoldás (1) alatti összefüggésben nem helyettesítjük be $\operatorname{tg} \dfrac{\varepsilon}{2}$-nek (2) alatti értékét, hanem az alábbi képletet alkalmazzuk, akkor

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 \operatorname{tg} \dfrac{\varepsilon}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\varepsilon}{2}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \cos\varphi}{1 - 3 \cdot \cos\varphi}.$$

A numerikus eredmények természetesen egyeznek az I. megoldáson nyert eredményekkel.

Kovács László (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)

III. megoldás: Az A_1OS derékszögű háromszögben

(1) $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{\varrho} = \frac{6m}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}m}{a}.$$

Az $OB = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} = \dfrac{a}{3}\sqrt{3}$ távolságot r-rel jelölve, a BOS derékszögű háromszögben

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{a}{2SB} = \frac{a}{2\sqrt{m^2 + r^2}},$$

és így

(2) $$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{c^2}{4\left(m^2 + \dfrac{a^2}{3}\right)} = \frac{3a^2}{12m^2 + 4a^2}.$$

(1)-ből

$$m^2 = \frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi}{12},$$

amely értéket (2)-be helyettesítve és a^2-tel egyszerűsítve

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1 - \cos\varepsilon}{2} = \frac{3}{\operatorname{tg}^2 \varphi + 4},$$

amiből

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{6}{\operatorname{tg}^2 \varphi + 4} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi - 2}{\operatorname{tg}^2 \varphi + 4}.$$

Mohos Béla (Pannonhalma, Benczés g. III. o. t.)