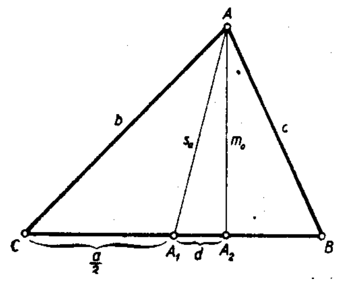
I. megoldás: Jelöljük s_a és m_a talppontját A_1 ill. A_2-vel (1. ábra) és legyen $A_1A_2 = d$.



1. ábra

Az s_a, m_a, és d ismeretlenekre – Pythagoras tétele alapján – a következő három egyenlet állítható fel:

(1) $$s_a^2 = m_a^2 + d^2,$$

(2) $$b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2} + d\right)^2,$$

(3) $$c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2.$$

(1)-böl $m_a^2 = s_a^2 - d^2$. Ezen értéket (2) és (3)-ba helyettesítve

(4) $$b^2 = s_a^2 - d^2 + \frac{a^2}{4} + ad + d^4$$

(5) $$c^2 = s_a^2 - d^2 + \frac{a^2}{4} - ad + d^2$$

(4) és (5) összege

$$b^2 + c^2 = 2s_a^2 + \frac{a^2}{2},$$

amiből

$$2s_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2},$$

és így

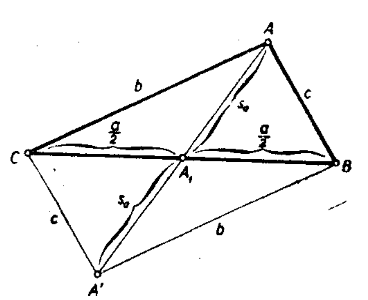
$$s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

Hasonlóképpen

$$s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} \qquad \text{és} \qquad s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$

Bali György (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyen A tükörképe a BC oldal A_1 felezőpontjára nézve A'. (2.ábra.)



2. ábra

Az $ABA'C$ paralelogrammára alkalmazva az ismeretes tételt, mely szerint a négy oldal négyzeteinek összege egyenlő az átlók négyzeteinek összegével (L. II. oszt. tankönyv)

$$2(b^2 + c^2) = (2s_a)^2 + a^2,$$

amiből

$$4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

és így

$$s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

Vastag György (Bp. XXI., Jedlik A. g. III. o. t.)