I. megoldás: Egy szám akkor osztható 5-tel, ha az utolsó jegye 0 vagy 5.

Az
$$N = 1^n + 2^n + \ldots + 8^n$$
összeg utolsó jegyét az egyes tagok utolsó jegyei összegének utolsó jegye adja.

Könnyű belátni, hogy

1. 1-gyel bármely szám, 6-tal pedig bármely páros szám szorozva, annak utolsó jegye nem változik ($\ldots 0 \cdot 6 = \ldots 0$, $\ldots 2 \cdot 6 = \ldots 2$, $\ldots 4 \cdot 6 = \ldots 4$, $\ldots 6 \cdot 6 = \ldots 6$ $\ldots 8 \cdot 6 = \ldots 8$),

és 2. bármely 1-re ill. 6-ra végződő szám minden pozitív egész kitevőjű hatványa 1-re ill. 6-ra végződik.

3. Az 5-re (és 0-ra) végződő számok kivételével bármely páratlan ill. páros szám $4k$-adik hatványa (ahol $k = 1, 2, \ldots$) 1-gyel ill. 6-tal végződik. Mivel a hatvány utolsó jegye csak az alap utolsó jegyétől függ, azért elég állításunkat csak 1-jegyű számokra igazolni. A 2. pont alapján

1 minden hatány		1,	$2^{4k} = 16^k$	végződése	6,
$3^{4k} = 81^k$	végződése	1,	$4^{4k} = 16^{2k}$	«	6,
$7^{4k} = 2401^k$	«	1,	6^{4k}	«	6,
$(9^{4k} = 81^{2k}$	«	1),	$8^{4k} = 4096^k$	«	6.

A 3. és 1. pont alapján következik:

Minden szám $(4k+1)$-edik hatványának utolsó jegye megegyezik az alap (azaz első hatványának) utolsó jegyével. Eszerint tehát elég a $4k-3$, $4k-2$, $4k-1$ és $4k$ alakú kitevőkre ($k = 1, 2, \ldots$) vizsgálni a végződéseket.

Az n kitevő alakja	A végződések rendre							
$4k-3$	1	2	3	4	5	6	7	8
$4k-2$	1	4	9	6	5	6	9	4
$4k-1$	1	8	7	4	5	6	3	2
$4k$	1	6	1	6	5	6	1	6

A végződések összege az egyes sorokban 36, 44, 36, 32, vagyis N utolsó jegye 6, 4, 6, 2 és így 5-tel osztva a maradék rendre 1, 4, 1, 2.

Kovács László (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)

II. megoldás: 1. Ha $n = 2k$ alakú, akkor
$$N = 1 + (5-1)^k + (10-1)^k + (15+1)^k + 25^k + (35+1)^k + (50-1)^k + (65-1)^k.$$

Most két alesetet kell megkülönböztetni:

a) k páros, akkor a binomiális tétel figyelembevételével $N = 5A + 7 \cdot 1 = 5(A+1) + 2$,

b) k páratlan, akkor ugyancsak a binomiális tétel alapján
$$N = 5B + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 5B - 1.$$

2. Ha $n = 2k+1$, akkor
$$N = 1 + (2^{2k+1} + 8^{2k+1}) + (3^{2k+1} + 7^{2k+1}) + (4^{2k+1} + 6^{2k+1}) + 5^{2k+1}.$$

De ismeretes, hogy $(a^{2k+1} + b^{2k+1})$ mindig osztható $(a+b)$-vel, és így a második, harmadik és negyedik tag osztható 10-zel, az utolsó tag pedig 5-tel. Tehát ez esetben
$$N = 5C + 1.$$

Balatoni Ferenc (Bp. III., Árpád g. III. o. t.)

Megjegyzés: Mindkét megoldásnál nemcsak azt bizonyítottuk, hogy N nem osztható 5-tel, hanem még a maradékot is meghatároztuk aszerint, amint az n kitevő 4-gyel osztva 1, 2, 3 vagy 0-t ad maradékul.