I. Két pontból egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a térben a 2 pont távolságát merőlegesen felező sík. Tehát a keresett mértani hely az az AB szakaszt ill, a CD szakaszt merőlegesen felező síkok metszésvonala. (Vigyázat! E metszésvonal pontjai általában nincsenek egyenlő távolságban a 4 adott ponttól.)

Speciális esetek: Ha $A \equiv C$ és $B \equiv D$, akkor a közös távolságot merőlegesen felező sík a mértani hely. Ha pedig $AB \parallel CD$, akkor nincs a végesben pont, amely feltételeinknek eleget tenne.

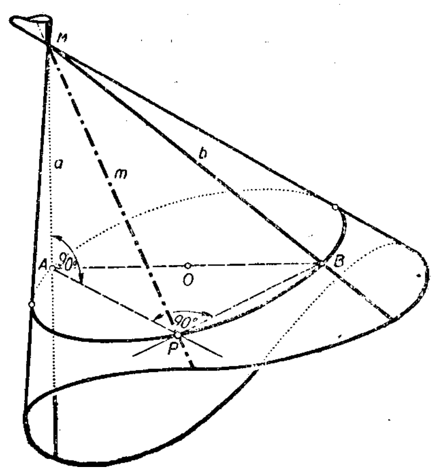
II. *a)* Az AB egyenesen átmenő tetszőleges síkban a geometriai hely egy Thales-kör, tehát a térben a keresett mértani hely az AB távolság fölé, mint átmérő fölé rajzolt Thales-gömb.

II. *b)* jelöljük az adott párhuzamos egyeneseket a-val és b-vel. Tekintsünk egy a-n átmenő tetszőleges síkot és egy erre merőleges síkot a b-n át. E két síknak, a-val és b-vel párhuzamos, metszésvonala: m nyilván a mértani hely egy része. Ha az a, b és m-re merőleges síkkal metsszük a két síkot, ez a harmadik sík kimetszi a két síkból a $90°$-os lapszög szárait és az a és b egyenesekből az A és B pontokat. Tehát a harmadik síkban a keresett mértani hely egy része egy Thales-kör, amelynek átmérője AB. A teljes mértani hely a térben tehát az a forgáskúpfelület, amelynek vezérköre az a és b-re merőleges síkban van, egyik átmérőjének végpontjai pedig e normálsíknak metszéspontjai az a és b egyenesekkel.

Mind a három itt tárgyalt példában, könnyű belátni, hogy a tér egyéb pontjai nem tehetnek eleget követelményünknek.

Kovács László (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)

II. *c)* A két adott a és b egyenes metszéspontját jelöljük M-mel. Vegyünk az a egyenesen át egy tetszőleges síkot. A b egyenes tetszőleges B pontjából e síkra bocsátott merőleges egyenes messe ezt a síkot egy P pontban. (L. ábrát.)



1. ábra

A BP egyenes természetesen merőleges a-ra (mert, ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor annak minden egyenesére merőleges) és így fektethetünk BP-n át olyan síkot, amely a-ra merőleges. Messe az utóbbi sík az a-t A pontban, akkor BP az előbb idézett tétel alapján AP-re is merőleges. Továbbá a $[bP]$ sík $\perp$ $[aP]$ síkra, mert hiszen tartalmaz egy olyan egyenest: BP, amely $\perp$ $[aP]$ síkra. E két egymásra merőleges sík metszésvonala $PM = m$ nyilván a mértani hely egy része. Ha az $[aP]$ sík a körül forog, akkor a P-nél állandóan fellépő APB derékszög miatt a P pont Thales-kört ír le az AB átmérő fölött.

Tehát a keresett mértani hely olyan másodrendű kúpfelület, amelynek középpontja a két egyenes metszéspontja, vezérkörének síkja valamelyik adott egyenesre (t. i. a b-re merőleges síkmetszet is kör, hiszen a és b felcserélhető) merőleges sík, és vezérkörének átmérője pedig síkjának a két adott egyenessel való metszéspontjai által meghatározott szakasz. Könnyű belátni, hogy a tér egyéb pontjai nem felelhetnek meg követelményünknek.

Speciális eset: Ha $a \perp b$, akkor a kúpfelület 2 síkká fajul: a és b-re illeszkedő b ill. a-ra merőleges síkok.

Nem Kevesebb mint 60 megoldó forgáskúp-felületet adott meg mértani helyként.

Megjegyzés: Ne mondjuk azt, hogy »ellipszis-kúp« mert minden *másodrendű* kúp vezérgörbéje lehet kör, ellipszis, parabola vagy hiperbola, minthogy ismeretes, hogy minden másodrendű kúpon mind a négyféle síkmetszet fellelhető. (Elliptikus henger, parabolikus henger, hiperbolikus henger azonban létezik.) Kúpfelülettel kapcsolatban (más fogalom a *kúptest*) mellőzzük az, »ikerkúp« és »kettőskúp« kifejezéseket, mert ilyen éppen úgy nincs, ahogy nincs »ikerhiperbola«. Kúp »csúcspontja« (középpontja helyett) és »kúppalást« (kúpfelület helyett) szintén olyan kifejezések, amelyek csak a *kúptest*tel kapcsolatban használhatók.