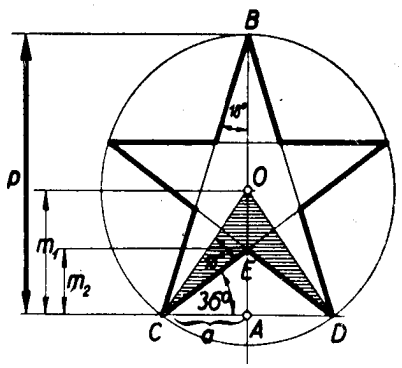
A betűzést az ábra mutatja.



Legyen az adott $AB = p$, $AC = AD = a$, $AO = m_1$, $AE = m_2$. Mivel $AOC\sphericalangle = \dfrac{360°}{10} = 36°$, azért $ABC\sphericalangle = OCE\sphericalangle = 18°$, $ACO\sphericalangle = 54°$, $ACE\sphericalangle = 54° - 18° = 36°$.

Az $ABC_\triangle$-ből $a = p \text{ tg } 18°$,

az $AOC_\triangle$-ből $m_1 = a \text{ tg } 54° = p \text{ tg } 18° \text{ tg } 54°$,

az $AEC_\triangle$-ből $m_2 = a \text{ tg } 36° = p \text{ tg } 18° \text{ tg } 36°$.

A keresett T terület nyilván az $OCED$ deltoid területének (t) 5-szöröse. E deltoid területe pedig nem egyéb, mint a $CDO_\triangle$ területének (t_1) és a $CDE_\triangle$ területének (t_2) különbsége.

De

$$t_1 = a\ m_1 = p^2 \text{tg}^2\ 18° \text{tg } 54°,$$
$$t_2 = a\ m_2 = p^2 \text{tg}^2\ 18° \text{tg } 36°,$$

és így

$$T = 5t = 5(t_1 - t_2) = 5p^2 \text{tg}^2\ 18° (\text{tg } 54° - \text{tg } 36°). \tag{1}$$

De

$$\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta},$$

és így

$$\text{tg } 54° - \text{tg } 36° = \frac{\sin 18°}{\cos 54° \cos 36°} = \frac{2\sin 28°}{2\sin 36° \cos 36°} = \frac{2\sin 18°}{\sin 72°} = \frac{2\sin 18°}{\cos 18°} = 2 \text{ tg } 18°.$$

Az itt nyert értéket (1)-be helyettesítve

$$T = 10p^2 \text{tg}^3\ 18°.$$

Ha a $BC = BD$ szakaszt egységnek vesszük, akkor CD nem egyéb, mint az az egységsugarú körbe írt szabályos 10-szög egy oldala, amely – mint ismeretes – $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tehát $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ és így Pythagoras tétele alapján

$$p^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16},$$

vagyis

$$p = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ennélfogva

$$\text{tg } 18° = \frac{p}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5},$$

és így

$$\text{tg}^3\ 18° = \left(\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}\right)^3 = \frac{\sqrt{85-38\sqrt{5}}}{5}.$$

Tehát

$$T = 10p^2 \text{tg}^3\ 18° = 2\sqrt{85-38\sqrt{5}}\ p^2 \approx 0{,}343\ p^2.$$

Ez utóbbi eredményhez természetesen, a tg 18° felhasználása nélkül, közvetlenül is juthatunk.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. I. o. t.)

Edvi Illés Judit (Bp. XVI., Corvin Mátyás g. IV. o. t.)