Legyen $\overset{3}{\log}\, x = u$ és $\overset{3}{\log}\, y = v$, akkor $x = 3^u$, $y = 3^v$ és így a két egyenlet:

$$\begin{gathered}(3^u)^u \cdot (3^v)^v = 3^{u^2} \cdot 3^{v^2} = 3^{u^2+v^2} = 3^5,\\ (3^u)^v \cdot (3^v)^u = 3^{uv} \cdot 3^{vu} = 3^{2uv} = 3^4.\end{gathered}$$

Ennélfogva

$$u^2 + v^2 = 5, \tag{1}$$

és

$$2uv = 4. \tag{2}$$

(1) és (2) összege, illetőleg különbsége

$$(u+v)^2 = 9, \qquad (u-v)^2 = 1,$$

vagyis

$$u+v = \pm 3, \qquad u-v = \pm 1.$$

Ez 4 egyenletpart jelent, amelyeket megoldva:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2, \quad v_1 = 1; &\qquad u_2 &= 1, \quad v_2 = 2;\\ u_3 &= -2, \quad v_3 = -1; &\qquad u_4 &= -1, \quad v_4 = -2;\end{aligned}$$

és így

$$\begin{array}{llll} u_1 = \overset{3}{\log}\, x_1 = 2, & \text{amiből } x_1 = 9, & v_1 = \overset{3}{\log}\, y_1 = 1, & \text{amiből } y_1 = 3,\\ u_2 = \overset{3}{\log}\, x_2 = 1, & \text{«} \quad x_2 = 3, & v_2 = \overset{3}{\log}\, y_2 = 2, & \text{«} \quad y_2 = 9,\\ u_3 = \overset{3}{\log}\, x_3 = -2, & \text{«} \quad x_3 = \dfrac{1}{9}, & v_3 = \overset{3}{\log}\, y_3 = -1, & \text{«} \quad y_3 = \dfrac{1}{3},\\ u_4 = \overset{3}{\log}\, x_4 = -1, & \text{«} \quad x_4 = \dfrac{1}{3}, & v_4 = \overset{3}{\log}\, y_4 = -2, & \text{«} \quad y_4 = \dfrac{1}{9}.\end{array}$$

A gyökök összetartozását az indexek jelzik. A kapott értékeket az eredeti egyenletbe helyettesítve, ellenőrizhetjük a megoldás helyességét. A 4 gyökpár, a szimmetria miatt, tulajdonképpen csak 2 különböző párt jelent, amint az – x és y felcserélhetősége miatt – várható is volt.

Babos Károly (Székesfehérvár, József Attila g. IV. o. t.)