I. megoldás: Jelöljük a házaspárokat a következő elemekkel Aa, Bb, Cc, Dd. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy A mindig megtartja helyét ; akkor a többi 7 elem 7!-féleképpen helyezkedhetik el. De a nem kerülhet A mellé, vagyis a sem második, sem nyolcadik elem nem lehet, vagyis $2\cdot 6!$ számú csoporttól el kell tekintenünk, Tehát ezen első feltétel figyelembevételével

$$7!-2\cdot 6! \tag{1}$$

számú elhelyezkedés lehetséges.

De B sem kerülhet b mellé. Azon csoportok száma, amelyekben B és b szomszédos elemek, $2\cdot 6!$ De ezekből a csoportokból azokat, amelyekben A és a is egymás mellett vannak, mar tekintetbe vettük. Ilyen csoport (B, b és egyúttal A, a egymás mellett) $2!2!=4$-szer (Aa, Bb; Aa, bB; aA, Bb; aA, bB) annyi van, mint ahány permutáció képezhető a C, c, D, d, (Bb) elemekből, ahol (Bb) egy elemnek számít. Ezeknek a száma tehát $4\cdot 5!$, és így (1)-ből kivonandó

$$2\cdot 6!-4\cdot 5! \tag{2}$$

A harmadik feltételt is tekintetbe véve, t. i., hogy C sem kerülhet c mellé: (1)-ből ismét ki kell vonni $2\cdot 6!$ De (1)-ben már tekintetbe vettük azokat, amelyekben A, a és egyúttal C, c van egymás mellett, tehát (a fentiek szerint) csak $2\cdot 6!-4\cdot 5!$ vonandó ki. De (2)-ben szerepelnek már azok, amelyekben (A, a-n kívül) C, c is egyúttal B, b vannak egymás mellett. Ilyen van $4\cdot 5!-2!2!2!4!=4\cdot 5!-8\cdot 4!$ ahol $4!$ jelenti a D, d, (Bb), (Cc) elemekből alkotott permutációk számát.

Tehát (1)-ből még kivonandó

$$(2\cdot 6!-4\cdot 5!)-(4\cdot 5!-8\cdot 4!).$$

A negyedik feltételt is tekintetbe véve, t. i, hogy D sem lehet d mellett, – az előbbiekhez hasonló meggondolásokkal nyerjük, – hogy (1)-ből még kivonandó

$$(2\cdot 6!-4\cdot 5!)-2(4\cdot 5!-8\cdot 4!)+(8\cdot 4!-16\cdot 3!).$$

Ennélfogva végeredményünk:

$$\begin{aligned}
&7!-2\cdot 6!-(2\cdot 6!-4\cdot 5!)-(2\cdot 6!-4\cdot 5!)+(4\cdot 5!-8\cdot 4!)-(2\cdot 6!-4\cdot 5!)+\\
&+2(4\cdot 5!-8\cdot 4!)-(8\cdot 4!-16\cdot 3!)=7!-2\cdot 6!-2\cdot 6!+4\cdot 5!-2\cdot 6!+4\cdot 5!+\\
&+4\cdot 5!-8\cdot 4!-2\cdot 6!+4\cdot 5!+8\cdot 5!-16\cdot 4!-8\cdot 4!+16\cdot 3!=7!-8\cdot 6!+24\cdot 5!-\\
&-32\cdot 4!+16\cdot 3!=5040-5760+2880-768+96=1488.
\end{aligned}$$

II. megoldás: A fenti jelölést megtartva és A helyét

megint rögzítve, állapítsuk meg azoknak az elhelyezéseknek számát, amelyekben legalább egy házaspár ül egymás mellett.

a) Négy házaspár hányféleképpen ülhet egymás mellett? Az (Aa)-t rögzítve, a többi 3 házaspár $3!$ – féleképpen foglalhat helyet. Ha minden egyes esetben a házastársakat egymás között felcseréljük $(2!)^4=16$ ülésmódot kapunk. Tehát az összes ülésrendek száma amelyekben mind a 4 házaspár egymás mellett ül

$$3!16=96. \tag{1}$$

b) Három házaspár egymás mellett, a negyedik szétválasztva. Üljenek egymás mellett az A, a; B, b; C, c házastársak, akkor az (Aa), (Bb), (Cc), D, d elemekből – az (Aa) rögzítése miatt – $4!$ csoport képezhető. A 3 egymás mellett ülő házaspáron belül a házastársakat felcserélve $(2!)^3=8$ csoport keletkezik. Tehát az ülésrendek száma $8\cdot 4!$, de ezekben bennfoglaltaknak az (1) alatti csoportok is, amelyekben 4 házaspár ül egymás mellett. Ezek számát levonva: $8\cdot 4!-96$. De 3 házaspárt 4 közül $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}=4$-félekeppen választhatunk ki és így ezen ülésrendek száma, amelyekben 3 és csakis 3 házaspár ül egymás mellett

$$4\cdot(8\cdot 4!-96)=4(192-96)=4\cdot 96=384, \tag{2}$$

c) Két házaspár egymás mellett, a másik kettő szétválasztva. Tegyük fel, hogy A, a és B, b ülnek egymás mellett, akkor az (Aa), (Bb), C, c, D, d elemekből – (Aa) rögzítése miatt – $5!$ csoport képezhető. Minden egyes csoportból az egymás mellett ülő házastársakon belül a házastársakat felcserélve $(2!)^2=4$ csoport keletkezik. Tehát az ülésrendek száma $4\cdot 5!$, de ezekben bennfoglaltaknak azok a csoportok is, amelyekben A, a és B, b-n kívül C, c, ill. D, d is egymás mellett ülnek, továbbá azok a csoportok is, amelyekben mind C, c mind D, d ülnek egymás mellett. Ilyen csoportok száma – az előbbiek szerint – mind a három esetben 96. Ezek szerint az olyan ülésrendek száma, amelyekben A, a és B, b egymás mellett ülnek a másik két házaspár pedig szétválasztva ül $4\cdot 5!-3\cdot 96$. Mivel pedig 2 házaspárt 4 házaspár közül $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választhatunk ki, ezért az összes lehetséges elhelyezkedések száma, amelyekben 2 és csakis 2 házaspár ül egymás mellett

$$6(4 \cdot 5! - 3 \cdot 96) = 6(480 - 288) = 6 \cdot 192 = 1152. \tag{3}$$

d) Végül tekintsük azokat az ülésrendeket, amelyekben egy házaspár ül egymás mellett, a többi három szétválasztva. Üljön A, a egymás mellett. Az (Aa), B, b, C, c, D, d elemektől – (Aa) rögzítése miatt – $6!$ csoport képezhető, és A, a elemek felcserélésével a csoportok száma $2 \cdot 6!$. Ezekben a csoportokban lesznek olyanok, amelyekben A, a-n kívül B, b; C, c és D, d házaspárok közül egyik (és csak az egyik) ül egymás mellett. Ilyen van – az előbbiek szerint – $3 \cdot 192$. Továbbá foglaltaknak a $2 \cdot 6!$ számú csoportban olyanok, amelyekben az utóbbi 3 házaspár közül 2–2 ül egymás mellett. Ilyen van $\binom{3}{2} \cdot 96$. Végül lesznek olyan csoportok, amelyikben az A, a-n kívül mind a többi 3 házaspár is egymás mellé kerül. Ezen csoportok száma – mind láttuk – 96. Tehát azon csoportok száma, amelyekben csak A, a van egymás mellett: $2 \cdot 6! - 3 \cdot 192 - 3 \cdot 96 - 96$, mivel 4 házaspár közül 1 házaspárt $\binom{4}{1} = 4$-féleképpen választhatunk ki, azért az összes ülésrendek száma, amelyekben 1 és csakis 1 házaspár ül egymás mellett

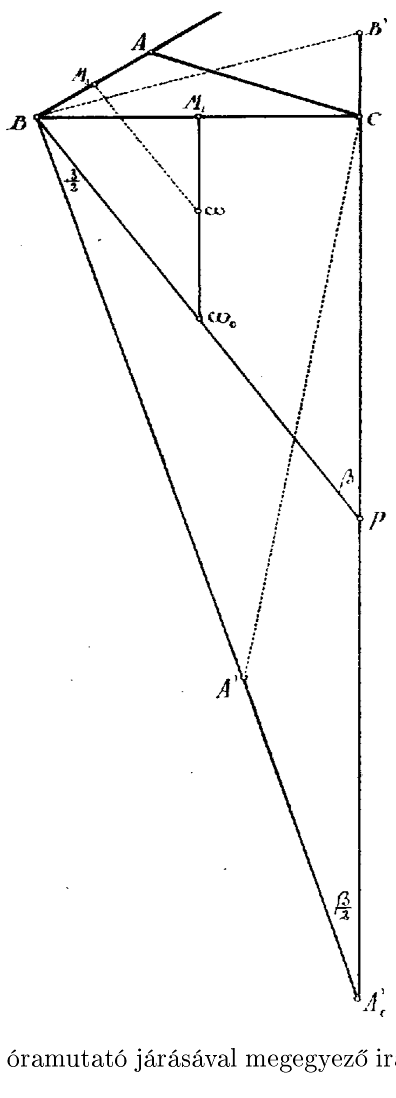
$$4(2 \cdot 6! - 3 \cdot 192 - 3 \cdot 96 - 96) = 4(1440 - 576 - 288 - 96) = 4 \cdot 480 = 1920 \tag{4}$$

Tehát a keresett ülésrendek számát megkapjuk, ha az összes lehetséges ülésrend számából kivonjuk az (1), (2), (3) és (4) alatti ülésrendek összegét:

$$7! - (96 + 384 + 1152 + 1920) - 5040 - 3552 = 1488.$$

Deseő Zoltán (Bp., X., I. László g. III. o. t.)

III. megoldás: Jelölés az előbbi. Válasszuk ki a 4 férfi részére az üléshelyek összes lehetséges 11-féle kombinációját, amint azt az ábra mutatja.



Minden egyes esetben helyezzük el (az óramutató járásával megegyező irányban) az a, b, c, d feleségeket úgy, hogy az ülésrend feltételeinknek megfeleljen.

1. Ez esetben a nők 4! számú csoportjából el kell hagyni a d-vel kezdődő, ill. a-val végződő csoportokat. Ilyen van $2\cdot 3!$, de akkor a d-vel kezdődő és egyszersmind a-val végződő 2 csoportot kétszer számítottuk. Tehát a feleségekből alkotható és feltételeinknek megfelelő csoportok száma: $4!-2\cdot 3!+2=24-12+2=14$. Ha a férjeket permutáljuk (az elfoglalt üléshelyeket nem változtatva), akkor minden egyes permutációhoz találunk 14 megfelelő női ülésrendet. Tehát az 1. esetben az összes lehetséges ülésrend száma $4!\cdot 14=24\cdot 14=336$.

2. Elég az α esetet vizsgálni, mert a β ennek tükörképe. C és D közé csak a vagy b kerülhet. Előbbi esetben a többi 3 feleség $(3!-2)=4$-féleképpen helyezkedhetik el D és A között, míg az utóbbi esetben csak acd, adc, cad felel meg feltételeinknek. Tehát α esetben 7, α és β esetekben együttvéve 14-féleképpen ülhetnek a feleségek. Az összes lehetséges ülésrend száma a 2 esetben $4!14=336$.

3. A feleségek megfelelő ülésrendje: $abcd$, $acbd$, $bacd$, $bcad$, $dabc$, $dacb$, $dbac$, $dcab$, vagyis 8. Összesen $4!8=192$.

4. α esetben B és C közé kerülhet a vagy d, és mindkét esetben a többi 3 feleség $(3!-2)=4$-féleképpen helyezkedhetik el, vagyis α esetben 8 féleképpen. Ugyanaz áll a β esetben, vagyis a nők összes megfelelő elhelyezkedésének száma 16. Viszont, ha a férjek összes 24 számú permutációját számba vesszük, akkor csak 12 különböző helyzetet találunk, mert az α eset $CDAB$ permutációja egyenértékű a β eset $ABCD$ permutációjával. Tehát az összes ülésrend száma: $\frac{4!}{2}\cdot 16=192$.

5. Itt 9 megfelelő ülésrend van a nők számára: $abcd$, $adbc$, $adcb$, $cabd$, $cbad$, $cdab$, $dabc$, $dacb$, $dbac$, viszont a férjek 24 permutációjából ismét csak a fele különböző, mert $CDAB$-egyenértékü $ABCD$-vel. Tehát az összes lehetséges ülésrend száma $\frac{4!}{2}\cdot 9=108$.

6. α esetben 4 ülésrend felel meg: $abcd$, $dabc$, $dacb$, $dbac$.

Ugyanaz áll a β esetre. Tehát az összes ülésrend száma: $4!\cdot 8=192$.

7. Itt a nők számára 5 megfelelő ülésrend található: $adbc$, $adcb$, $dabc$, $dacb$, $dbac$. Összesen $4!5=120$.

8. Ez esetben 2 megfelelő ülésrend van: $cdab$, $dabc$. A férjek 24 permutációjából 4–4 egyenértékű ($BCDA$, $CDAB$, $DABC$ és $ABCD$) és így csak 6 különböző permutáció jön számításba. Tehát összesen $\frac{24!}{4}\cdot 2=12$.

Tehát a keresett ülésrendek száma:
$336+336+192+192+108+192+120+12=1488$.

Beretvás Tamás (Bp., XIII., Berzsenyi D. g. IV. o. t.)