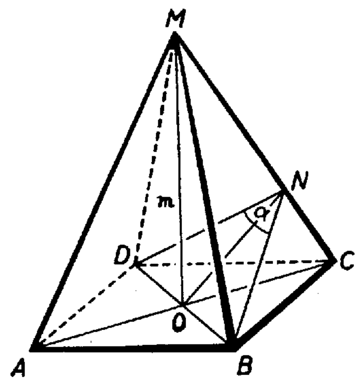
**I. megoldás:** A betűzést azt ábra mutatja.




Legyen a keresett magasság $OM = m$. Mivel a gúla szabályos, azért $BD \perp MC$ és így lehet a $BD$ átlón át síkot fektetni, amely merőleges az $MC$ oldalélre. Messe ez a sík az $MC$-t $N$-ben, akkor $BND_\triangle$ egyenlőszárú háromszög, melynek $N$ szöge az adott $\alpha$ szög.

Az $MNO_\triangle \approx MOC_\triangle$, mert e két háromszög derékszögű és az $M\sphericalangle$ közös, és így

$$m : ON = MC : OC,$$

amiből

(1) $$m = \frac{ON \cdot MC}{OC}.$$

Mivel

(2) $$OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad \text{azért} \quad ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Pythagoras tétele alapján

(3) $$MC = \sqrt{\frac{a^2}{2} + m^2},$$

és

(4) $$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A (2), (3) és (4) alatti értékeket (1)-be helyettesítve

$$m = \sqrt{\frac{a^2}{2} + m^2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

vagyis

$$m^2 = \frac{a^2}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{m}^2\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2},$$

amiből

(5) $$m = \sqrt{\frac{a^2\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\left(1 - \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}} = \frac{a}{\sqrt{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2}}.$$

*Megjegyzés:* Az (5) alatti eredmény jobboldala egyenértékű a következő kifejezésekkel:

$$\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2\cos(180 - \alpha)}} = a\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{4\cos(180 - \alpha)}} = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}$$

stb. stb. Ha mindezekbe a kifejezésekbe $\alpha = 120^\circ$-ot helyettesítünk, megkapjuk a Rákosi versenypéldában szereplő speciális $m = \frac{a}{2}$ értéket. $m$-re csak akkor kapunk valós és véges értéket, ha $90^\circ < \alpha$. Az $\alpha < 180^\circ$ felső határ az $\alpha$ értelmezéséből adódik.

*Eichorn József* (Pécs, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

**II. megoldás:** Tekintsük a két gúlát, amelyeknek közös alapja a $BND\triangle$ és magassága $NM$ ill. $NC$. E két gúla köbtartalmának összege egyenlő az eredeti gúla köbtartalmának felével, azaz (a közös alap területét $t$-vel jelölve)

$$t\,\frac{NM}{3}+t\,\frac{NC}{3}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{m}{3},$$

ahonnan

$$t\cdot MC=\frac{a^2}{2}\cdot m.$$

Tehát

$$m=\frac{2t\cdot MC}{a^2}=\frac{a\sqrt{2}\cdot ON\cdot MC}{a^2}=\frac{ON\cdot MC\cdot\sqrt{2}}{a},$$

ami azonos az I. megoldás (1) alatti összefüggésével.