I. megoldás: Mivel $\gamma = 120^\circ$, azért c az $ABC\triangle$ legnagyobb oldala, és így

$$a < c < a + b, \tag{1}$$

és

$$b < c < a + b. \tag{2}$$

Azt kell bizonyítani, hogy az (1), ill. (2)-ben szereplő oldalakból háromszöget lehet szerkeszteni. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a legnagyobb oldal kisebb legyen a másik két oldal összegénél, vagyis

$$a + b < a + c \tag{3}$$
$$a + b < b + c \tag{4}$$

De (3) közvetlenül következik (2) első egyenlőtlenségéből és (4) közvetlenül (1) első részének folyománya.

Ezzel tételünk első részét bebizonyítottuk.

Jelöljük az (1) alatti oldalukból szerkesztett háromszög szögeit rendre α', β' és γ'-vel.

Az eredeti $ABC_\triangle$-ből a cosinus tétel alapján

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab \tag{5}$$

mivel $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

Másrészt a megszerkesztett háromszögből ugyancsak a cosinus–tétel felhasználásával

$$c^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b)\cos\beta' \tag{6}$$

(5) és (6)-ból következik, hogy

$$a^2 + b^2 + ab = a^2 + a^2 + 2ab + b^2 - 2a(a + b)\cos\beta'$$

amiből

$$2a(a + b)\cos b' = a^2 + ab = a(a + b),$$

és így

$$\cos\beta' = \frac{1}{2},$$

vagyis

$$\beta' = 60^\circ$$

A sinus–tétel szerint

$$\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'} = \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Mivel

$$\sin\beta' = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{és} \quad \sin\gamma = \sin 120^\circ = \frac{1}{2},$$

azért

$$\sin\alpha' = \sin\alpha$$

α' és α közül egyik sem fekszik a legnagyobb oldallal szemben, tehát egyikük sem lehet tompaszög, vagyis

$$\alpha' = \alpha,$$

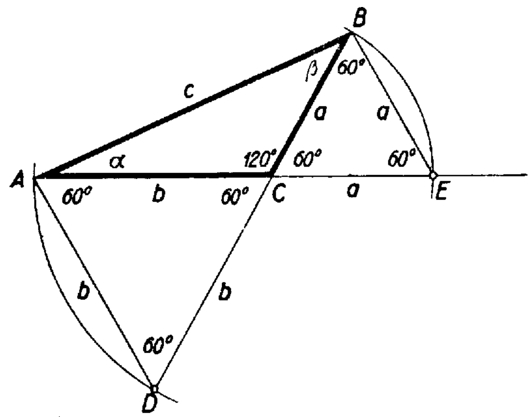
és

$$\gamma' = 180^\circ - \beta' - \alpha' = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha = 60^\circ + \beta.$$

A másik háromszöggel nem kell külön foglalkozni, mert csak a és b oldalakat, ill. α és β szögeket kell egymás között felcserélni.

Kántor Sándor (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Állításunkat azzal bizonyíthatjuk, hogy tényleg megszerkesztjük az a, c, $a + b$ és b, c, $a + b$ oldalú háromszögeket.



Rajzoljuk meg az adott $ABC_\triangle$-et, melyben $\gamma = 120^\circ$. (L. ábrát). Hosszabbítsuk meg az a és b oldalakat C-n túl a $CD = b$, illetőleg $CE = a$ szakaszokkal. Mivel γ mellékszöge 60°, azért az BCE és ACD háromszögek nemcsak egyenlő szárúak, hanem egyenlő oldalúak, és így $EAB_\triangle$ és $DBA_\triangle$ a keresett háromszögek, melyeknek szögei tehát

$$60^\circ,\ \alpha,\ 60^\circ + \beta$$

illetőleg

$$60^\circ,\ \beta,\ 60^\circ + \alpha$$

Misota Lajos (Pécs, Nagy Lajos g. IV. o. t.)