Egyelőre tekintsünk el a konkrét numerikus adatoktól, csak azt tételezzük fel, hogy $a > b$.

Tárgyalásunkat egyszerűsíthetjük, ha mindjárt az elején a következő megállapításokat tesszük:

1. Görbénk – a négyzetgyök két ellenkező jelű értéke miatt – az x tengelyre nézve szimmetrikus két ágból áll.

2. Görbénk az y tengelyre is tükrös, mert csak x^2-es tagok fordulnak elő, és így y értéke $a+x$ helyen ugyanaz, mint a $-x$ helyen.

Elég tehát csak pozitív x és y értékekre szorítkozni. Alakítsuk át az

$$y = +\left[\frac{4a^2x^2 + b^2(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

függvényt a következőképpen:

$$y = \left[\frac{4a^2x^2 + b^2x^4 - 2b^2x^2 + b^2}{(x^2+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4a^2x^2 - 4b^2x^2 + b^2(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{4(a^2-b^2)x^2}{(x^2+1)^2} + b^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4(a^2-b^2)}{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2} + b^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

De

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 4 + x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2,$$

és így függvényünk ilyen alakban írható:

$$y = f(x) = \left[\frac{4(a^2-b^2)}{4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} + b^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ebből az alakból rögtön leolvasható, hogy egyedül a nevező változó, és mivel a feltételünk szerint a számláló mindig pozitív, ezért függvényünknek ott lesz minimuma illetőleg maximuma, ahol a nevező a legnagyobb ill. legkisebb.

a) A nevező a legnagyobb, ha vagy x nő minden határon túl, vagy $\frac{1}{x}$ nő minden határon túl, vagyis x nullává válik. E két esetben ($x = 0, \infty$) tehát a szögletes zárójelben lévő tört 0-vá válik és így

$$y_{\min} = [b^2]^{\frac{1}{2}} = b.$$

Görbénk tehát az $x = 0$ helyen felülről érinti az $y = b$ egyenest, és ha x minden határon túlnő ($x \to \infty$) akkor a görbénk felülről aszimptotikusan közeledik az $y = b$ végérintőhöz (aszimptotához).

b) A nevező a legkisebb, ha az állandóan pozitív $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$, vagyis $x = \frac{1}{x}$, azaz $x = 1$ (a megállapodásunknak megfelelően csak pozitív értéket véve figyelembe).

Tehát az $x = 1$ helyen $f(x)$-nek maximuma van, és

$$y_{\max} = \left[(a^2-b^2) + b^2\right]^{\frac{1}{2}} = a$$

Görbénk tehát az $x = 1$ helyen alulról érinti az $y = a$ egyenest.

Tehát, ha x változik 0-tól 1-ig, akkor y nő b-től a-ig, és ha x nő 1-től minden határon túl, akkor y csökken a-tól b-ig olymódon, hogy mindenkor

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right),$$

amint erről közvetlenül behelyettesítés útján meggyőződhetünk:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2.$$

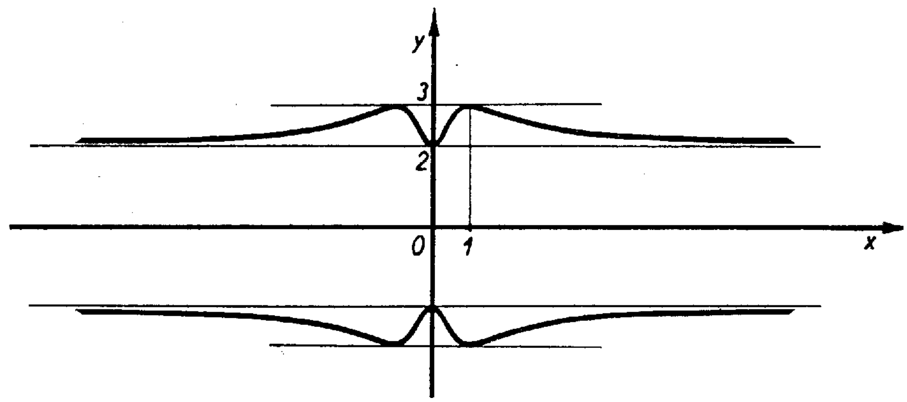
Áttérve most már az $a = 3$, $b = 2$ numerikus adatokra

$$y = f(x) = \left[\frac{20}{4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} + 4\right]^{\frac{1}{2}}$$

és néhány helyen kiszámítva az $f(x)$ értékét, a következő értéktáblázatot nyerjük:

x	0	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
	∞	10	5	2,5	2	1,67	1,25	
y	2	2,05	2,18	2,53	2,68	2,81	2,96	3

A teljes görbét az x és y tengelyeken át való tükrözéssel nyerjük. (l. ábrát)



Számos ábra hibája, hogy a szélső értékeknél a görbe nem érinti az $y = \pm 2$ és $y = \pm 3$ egyeneseket.