Egy 10-es számrendszerbeli szám általános alakja

$$N = a_{2n}10^{2n} + a_{2n-1}10^{2n-1} + a_{2n-2}10^{2n-2} + \dots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

ahol az együtthatók 1-jegyű természetes számok a 0-t is beleértve. Ha a szám páros számú számjegyekből áll, akkor $a_{2n} = 0$.

Ismeretes, hogy $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ osztható $(a+b)$-vel, és $a^{2k} - b^{2k} = (a^2)^k - (b^2)^k$ osztható $(a^2 - b^2)$-tel, amiből következik, hogy $10^{2k+1} + 1$ osztható $10 + 1 = 11$-gyel és $10^{2k} - 1 = 100^k - 1$ osztható $100 - 1 = 99$-cel és így 11-gyel is.

Ezt tudva, N-et a következő alakban írjuk fel:

$$\begin{aligned} N &= a_{0n}10^{2n} - a_{2n} + a_{2n} + a_{2n-1}10^{2n-1} + a_{2n-1} - a_{2n-1} + a_{2n-2}10^{2n-2} - a^{2n-2} + \\ &\quad + a_{2n-2} + \dots + a_3 10^3 + a_3 - a_3 + a_2 10^2 - a_2 + a_2 + a_1 10 + a_1 - a_1 + a_0 = \\ &\quad = a_{2n}(10^{2n} - 1) + a_{2n-1}(10^{2n-1} + 1) + a_{2n-2}(10^{2n-2} - 1) + \dots + a_3(10^3 + 1) + \\ &+ a_2(10^2 - 1) + a_1(10 + 1) + (a_{2n} + a_{2n-2} + \dots + a_2 + a_0) - (a_{2n-1} + a_{2n-3} + \dots + a_3 + a_1). \end{aligned}$$

Ezen összegben az első $2n$ számú tag a fentiek szerint osztható 11-gyel, és így ha N-et elosztjuk 11-gyel ugyanannyit kapunk maradékul, mintha az első $2n$ számú tag után következő különbséget osztanók 11-gyel, ez a különbség pedig éppen a tételünkben szereplő különbség.

Megjegyzés: Ha e különbség negatív, akkor legegyszerűbben a 11 megfelelő többszörösének hozzáadásával kapjuk meg a pozitív maradékot. Pl. 19 082 esetén a különbség $3 - 17 = -14$. Ez esetben $-14 + 2 \cdot 11 = 8$ a keresett maradék.

Biczó Géza (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

Elfogadtuk azokat a megoldásokat is, amelyek nem tartalmaztak általános bizonyítást.