I. megoldás: A triviális esetek kizárására és a megoldhatóságot szem előtt tartva, feltételezzük, hogy a, b és $c \neq 0$ és természetesen $p \neq 0$.

Az egyenes akkor és csak akkor érinti a parabolát, ha a parabolával alkotott két metszéspontja egybeesik, vagyis ha az

$$y^2 = 2\,px \tag{1}$$

és

$$-by - c^2 = ax \tag{2}$$

egyenletrendszernek csak egy gyökpárja van.

Helyettesítsük (2)-ből x értékét (1)-be, nyerjük

$$y^2 = -\frac{2p(by + c^2)}{a}.$$

Rendezve

$$y^2 + \frac{2p\,b}{a}y + \frac{2pc^2}{a} = 0,$$

amely egyenletnek gyökei akkor esnek egybe, ha a diszkriminánsa 0, vagyis

$$\frac{4p^2b^2}{a^2} - \frac{8pc^2}{a} = 0,$$

amiből ($p \neq 0$)

$$p = \frac{2ac^2}{b^2}.$$

Fülöp János (Bp. V., Piarista g. III. o. t.)

II. megoldás: Felhasználjuk, hogy a parabolát az $(x_1\, y_1)$ pontban érintő egyenes egyenlete

$$y_1 y = p(x + x_1),$$

azaz

$$y_1 y - px - px_1 = 0. \tag{3}$$

A

$$by + ax + c^2 = 0 \tag{4}$$

egyenlet ugyancsak az érintő egyenlete. Tehát ha (4)-t egy alkalmas számmal megszorozzuk, akkor az együtthatók rendre megegyeznek (3) együtthatóival.

Szorozzuk meg (4)-t $\frac{y_1}{b}$-vel, nyerjük az

$$y_1 y + \frac{ay_1}{b}x + \frac{c^2 y_1}{b} = 0$$

egyenletet, melyben y együtthatója ugyanaz, mint az (3) egyenletben y együtthatója, következőleg a másik két együttható is megegyezik:

$$-p = \frac{ay_1}{b}$$

és

$$-px_1 = \frac{c^2 y_1}{b}.$$

A két utóbbi összefüggésből kiszámítjuk az érintési pont koordinátáit:

$$x_1 = \frac{c^2}{a}, \quad y_1 = -\frac{bp}{a}.$$

Az érintési pont rajta van a parabolán, tehát koordinátái kielégítik a parabola egyenletét:

$$\frac{b^2p^2}{a^2} = 2p\frac{c^2}{a},$$

amiből

$$p = \frac{2ac^2}{b^2}.$$

Csáki Endre (Győr, Révai g. IV. o. t.)

III. megoldás: Felhasználjuk azt a tételt, hogy a parabola csúcsérintője felezi bármely más érintőnek az érintési pont és a parabola tengelye közé eső szakaszát.

Eszerint az érintési pont abszcisszája: az érintő x tengelymetszete ellenkező jellel, vagyis

$$x_1 = \frac{c^2}{a}.$$

Az érintési pont ordinátája pedig az y tengelymetszet kétszerese, azaz

$$y_1 = -\frac{2c^2}{b}.$$

Az érintési pont rajta van a parabolán stb. mint a II. megoldásban.

Molnár Tivadar (Kisvárda, Bessenyei g. IV. o. t.)

IV. megoldás: Felhasználjuk azt a tételt, hogy az érintő és csúcsérintő (y tengely) metszéspontjában az érintőre bocsátott merőleges áthalad a fókuszon. Ez más szóval azt jelenti, hogy az érintő y tengelymetszete, mint derékszögű háromszög magassága, mértani középarányos a $\frac{p}{2}$ és az érintő x tengelymetszetének abszolút értéke között.

Tehát

$$\frac{c^4}{b^2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{c^2}{a},$$

amiből

$$p = \frac{2ac^2}{b^2}$$

Tokaji Béla (Debrecen, Ép. ip. techn. IV. o. t.)