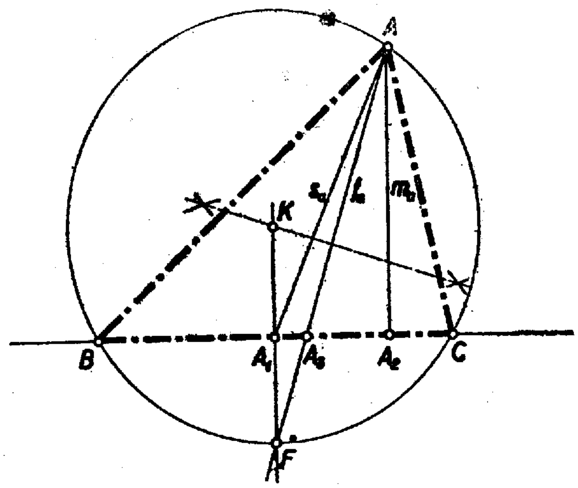
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra). A betűzést az ábra mutatja.



1. ábra

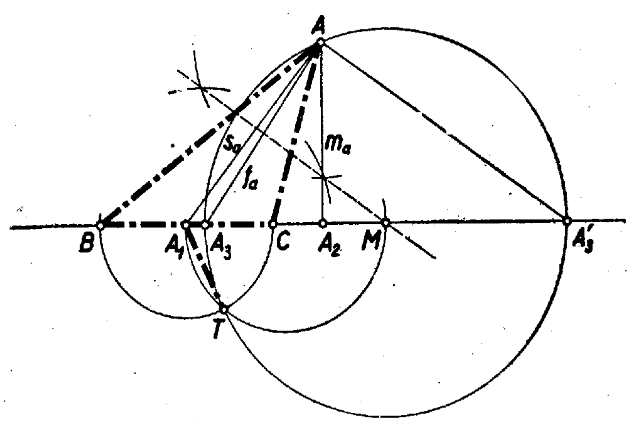
Egészítsük ki ábránkat a háromszög köré írt körrel és messe az A_1 ponton átmenő oldalfelező merőleges azt a BC ívet, amelyen nincs rajta az A pont, F-ben. Mivel a húrfelező merőleges a húrhoz tartozó körívet is felezi, azért a BF ív$=$ FC ívvel és így a kerületi szögek tétele alapján az f_a szögfelező meghosszabbítása átmegy az F ponton. Ebből viszont az is következik, hogy A_3 mindenkor (hacsak A_1 nem azonos A_2) A_1 és A_2 között fekszik, vagyis $m_a < f_a < s$. (Ha A_1 azonos A_2-vel, akkor a háromszög egyenlő szárú $m_a = f_a = s_a$ és a feladat határozatlan.)

Eszerint a szerkesztés menete: Felveszünk a $BC = a$ oldal hordozó egyenesét és azon az A_2 pontot. Az A_2-ben az a-ra emelt merőlegesre felmérjük az $A_2A = m_a$ távolságot. Az A pontból, mint középpontból az f_a és s_a szakaszokkal rajzolt körívek metszik ki az A_2-nek *ugyanazon* az oldalán, az A_3 és A_1 pontokat. (A_3 pont $f_a < s_a$ miatt A_2 és A_1 között.) Az A_1-ben a-ra emelt merőleges metszéspontja az AA_3 szögfelezővel szolgáltatja az F pontot. Az AF húrfelező merőleges egyenes metszi ki az A_1F egyenesből a háromszög köré írt kör középpontját: K-t. E pont kerül $KA = KF$ sugárral rajzolt kör metszése az a oldal hordozójával adja a B és C csúcspontokat.

Kozma Vera (Bp. V., 1. sz. textilip. techn. II. o. t.)

II. megoldás: Az A_1 és A_3 pontok megszerkesztése után, az F pont és a körülírt kör nélkül is, megszerkeszthetjük a B és C csúcspontokat.

Rajzoljuk meg az A csúcsponton át az f_a-ra merőleges külső szögfelezőt, amely az a oldal hordozóját az A_3' pontban metszi. (2. ábra)



2. ábra

Az A_3A_3' szakasz fölé, mint átmérő fölé rajzolt kör (amely Thales tétele alapján átmegy az A ponton), nem egyéb, mint a BC oldalhoz tartozó A-n átmenő Apollonius-féle kör. Állítjuk, hogy az A_1 pontból ezen körhöz szerkesztett érintő $A_1T = A_1B = A_1C = \frac{a}{2}$.

Bizonyítás: Legyen $A_1A_3 = p$, $A_1A_3' = q$, akkor

$$\frac{A_3C}{A_3B} = \frac{A_3'C}{A_3'B},$$

vagyis

$$\frac{\frac{a}{2}-p}{\frac{a}{2}+p}=\frac{q-\frac{a}{2}}{q+\frac{a}{2}}.$$

A törteket eltávolítva és rendezve

$$2a^2=8pq,$$

amiből

$$\frac{a}{2}=\sqrt{pq}.$$

De az A_1 pontból a körhöz szerkesztett érintő – ismert tétel alapján – mértani középarányos a p és q metszetek között, vagyis tényleg $A_1T=\frac{a}{2}$.

Schmidt Eligius (Bp. I., Fürst S. g. III. o. t.)