I. megoldás.

Először megnézzük, hogy a jobboldalon álló tört nevezője x milyen értékénél egyenlő zéróval.

Ha az ismeretes

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

azonosságban $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyébe t-t írunk, akkor $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$ és a kérdéses nevező

$$1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 + \frac{2t}{1-t^2} \cdot t = 1 + \frac{2t^2}{1-t^2} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Ez a kifejezés csak úgy lehet nulla, ha $t^2 = -1$, ami lehetetlen.

Eszerint a bizonyítandó azonosságnak mindig van értelme, hacsak a benne előforduló $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$-nek van értelme. Közülük $\cos x$ mindig értelmezve van,

$$\operatorname{tg} x\text{-nek az } x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2} \ldots\text{-nél}$$
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2}\text{-nek az } x = \pm\pi, \pm 3\pi \ldots\text{-nél}$$

nincs értelme. x ezen értékeit kizárjuk.

Mivel bizonyítandó azonosságunk nevezője sohasem veszi fel a 0 értékét, ezért egyenlőségünk mindkét oldalát megszorozhatjuk a nevezővel:

$$\cos x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = 1,$$

azaz

$$\cos x + \sin x \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 1.$$

Tekintettel a kizárt értékekre, mindkét oldalt megszorozhatjuk $\cos \frac{x}{2}$-vel:

$$\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}$$

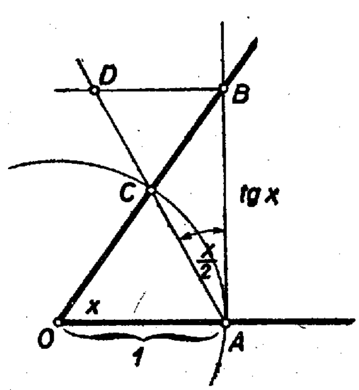
vagyis

$$\cos\left(x - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{x}{2},$$

ami tényleg azonosság.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. I. o. t.)

II. megoldás: Állítsuk elő az $OA = 1$ sugarú körben az x szög tangensét AB-t (l. ábrát).



Az OB szögszárnak az egységsugarú körrel való metszéspontját C-vel jelölve, a $BAC\sphericalangle = \frac{x}{2}$, mint kerületi szög és így az $ACB\sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - x) - \frac{x}{2} = 90^\circ + \frac{x}{2}$.

Az $ABC\triangle$-re alkalmazva a sinustételt:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sin\left(90^\circ + \dfrac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

vagyis $\quad BC = AB\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},$

és így $\quad \cos x = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA}{OC+CB} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$, ami bizonyítandó volt.

Megjegyzés: Ez a bizonyítás kiterjeszthető a többi szögnegyedekre is.

Zobor Ervin (Nagykanizsa, Irányi D. g. IV. o. t.)

III. megoldás: Emeljünk B-ben AB-re merőleges egyenest és messe ez az egyenes az AC húr meghosszabbítását D-ben. Az így keletkezett $CBD\triangle$ – a szögek egyenlősége miatt – hasonló a COA egyenlő szárú háromszöghöz, vagyis $CB = DB = AB\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ stb. mint a II. megoldásban.