I. megoldás: A fizikából ismeretes, hogy a parabolapálya csúcspontjának koordinátái

$$x=\frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}, \tag{1}$$

$$y=\frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}. \tag{2}$$

A legmagasabb az emelkedés, ha $\alpha=90^\circ$, amikor is $y_{\max}=\frac{c^2}{2g}$. Ezen érték helyett az egyszerűség kedvéért $2m$-et írva, az (1) és (2) alatti egyenletek a következő alakot veszik fel:

$$x=2m\sin 2\alpha, \tag{3}$$

$$y=2m\sin^2\alpha. \tag{4}$$

A mértani hely egyenletét megkapjuk, ha a tetszőleges értéket felvevő α paramétert kiküszöböljük.
Mivel $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, azért a (4) alatti egyenlet

$$y=m(1-\cos 2\alpha)=m-m\cos 2\alpha,$$

amiből

$$\cos^2 2\alpha=\frac{(y-m)^2}{m^2}, \tag{5}$$

(3)-ból

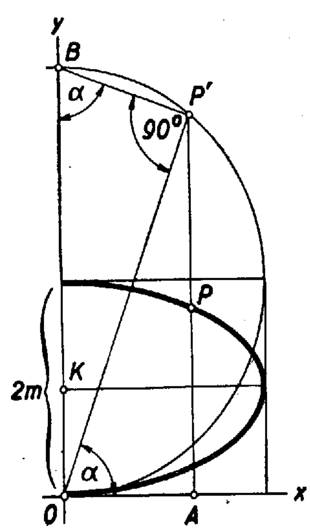
$$\sin^2 2\alpha=\frac{x^2}{(2m)^2}. \tag{6}$$

(5) és (6)-ot összeadva és az egyenlet két oldalát felcserélve

$$\frac{x^2}{(2m)^2}+\frac{(y-m)^2}{m^2}=1.$$

Ez egy olyan ellipszis egyenlete, melynek középpontja $K\ (0,m)$, nagy tengelye párhuzamos az abszcissza tengellyel és a fél nagy tengely hossza $2m$, az ordináta tengelyre eső kis tengely fele: m. Ezen adatokból az is kitűnik, hogy az ellipszis érinti az origóban az x tengelyt. Ebből az ellipszisből a *keresett mértani helynek* – $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$ feltétel miatt – csak az y tengelytől jobbra eső fél ellipszis felel meg. $m=\frac{c^2}{4g}$, vagyis ha g-t állandónak tekintjük, akkor m csak a c-től függ. m változásával az ellipszisek csak nagyságra változnak, egymás között mind hasonlók.

II. megoldás: Legyen $P\ (4m\sin\alpha\cos\alpha,\ 2m\sin^2\alpha)$ a mértani hely egy pontja, ahol $2m=\frac{c^2}{2g}=y_{\max}$. Vizsgáljuk meg azon P' pontok geometriai helyét, amelyeket a P pontok ordinátáinak megkettőzésével nyerünk. (L. ábrát, amely a betűzést is mutatja.)



Tehát P' koordinátái: $4m\sin\alpha\cos\alpha$, $4m\sin^2\alpha$.
Az OP' iránytangense$=\frac{4m\sin^2\alpha}{4m\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, vagyis OP' az x tengellyel a hajítás szögét zárja be.

P'-ben az OP'-re bocsátott merőleges messe az y tengelyt egy B pontban. A merőleges szárú szögpárok tétele alapján $P'BO\sphericalangle = \alpha$.

Pythagoras–tétele alapján

$$OP' = \sqrt{AP'^2 + AO^2} = \sqrt{16m^2 \sin^4 \alpha + 16m^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\ = \sqrt{16m^2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 4m \sin \alpha,$$

és így $OB = \dfrac{OP'}{\sin \alpha} = 4m$, *$\alpha$-tól független állandó.*

A P' pontok mértani helye tehát az $OB = 4m$ fölé rajzolt Thales–körnek az y tengelytől jobbra eső fele.

E kör egyenlete

$$x^2 + (y - 2m)^2 = (2m)^2.$$

A P pontok keresett mértani helye pedig e félkör pontjaihoz tartozó ordináták felezőpontjai.

E felező pontok mértani helye tehát

$$x^2 + (2y - 2m)^2 = (2m)^2,$$

vagyis

$$\frac{x^2}{(2m)^2} + \frac{(y - m)^2}{m^2} = 1, \quad \text{ahol} \quad x \geq 0.$$

Ez a fél ellipszis a félkörnek az y tengely irányában $\lambda = \dfrac{1}{2}$ arányban való »összenyomása« által keletkezett. (Lásd ált. gimnáziumok IV. oszt. tankönyvében: Függvény transzformációk 4. pontja, 43–44. oldal.)

Schmidt Eligius (Bp. I., Fürst S. g. II. o. t.)