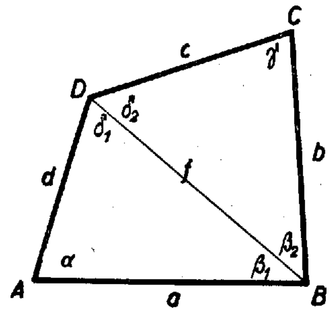
A betűzést az ábra mutatja.



A $BD=f$ átlót a cosinus-tétellel egyrészt az $ABD_\triangle$-ből, másrészt a $BCD_\triangle$-ből kifejezve:

$$f=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\gamma,$$

amiből

$$\cos\gamma=\frac{b^2+c^2-a^2-d^2+2ad\cos\alpha}{2bc}. \tag{1}$$

Az oldalakat rendre egy x arányossági tényezővel kifejezve:

$$a=9x,\quad b=8x,\quad c=7x,\quad d=6x.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve

$$\cos\gamma=\frac{64x^2+49x^2-81x^2-36x^2+108x^2\cos\alpha}{112x^2}=\frac{27\cos\alpha-1}{28}=\frac{7{,}086}{28},$$

amiből

$$\gamma=75°22'.$$

(γ másik értéke: $284°38'$ jelen esetben hurkolt négyszöghöz vezet.)

A négyszög kétszeres területe:

$$ad\sin\alpha+bc\sin\gamma=450,$$

vagyis

$$54x^2\sin\alpha+56x^2\sin\gamma=450,$$

amiből

$$x^2=\frac{450}{54\sin 72°36'+56\sin 75°22'}=\frac{450}{105{,}72},$$

és így

$$x=2{,}063.$$

Ennélfogva

$$a=18{,}567\text{ cm},\quad b=16{,}504\text{ cm},\quad c=14{,}441\text{ cm}\ \text{ és }\ d=12{,}378\text{ cm}.$$

A még hiányzó két szög kiszámítását megoldóink túlnyomó része – tangens–tétel hiányában – úgy végezték, hogy az a, d és α adatokból a kellemetlen cosinus-tétellel (főleg akkor kellemetlen, ha nem ismerjük a logaritmus használatra alkalmas alakját) kiszámították az f átlót és ezután a sinus-tétel kétszeri alkalmazásával a β_1 és β_2 szögeket.

A tangens-tétellel az f átló fáradságos kiszámítását megtakaríthatjuk és közvetlenül kiszámíthatjuk a β_1 és δ_1 valamint β_2 és δ_2 szögeket. A tangens-tétel a sinus-tételből rövid úton levezethető:

$$a:b=\sin\alpha:\sin\beta,$$

amiből

$$(a+b):(a-b)=(\sin\alpha+\sin\beta):(\sin\alpha-\sin\beta),$$

vagyis

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{2}$$

Ezzel már meg is van a tangens–tétel.

Mivel $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{180^\circ-\gamma}{2}=90^\circ-\dfrac{\gamma}{2}$ és $\operatorname{tg}\left(90-\dfrac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}$,
azért (2)-ből

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(a-b)\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{a+b}, \tag{3}$$

A (3) alatti képletet az $ABD_\triangle$-re alkalmazva

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_1-\beta_1}{2}=\frac{(a-d)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{a+d}=\frac{6{,}189\ \operatorname{cotg}\ 36^\circ18'}{30{,}945},$$

amiből

$$\frac{\delta_1-\beta_1}{2}=15^\circ15',$$

vagyis

$$\delta_1-\beta_1=30^\circ30'. \tag{4}$$

Másrészt

$$\delta_1+\beta_1=180^\circ-\alpha=107^\circ24', \tag{5}$$

és így (4) és (5)-ből

$$\delta_1=68^\circ57' \qquad \text{és} \qquad \beta_1=38^\circ27'.$$

Hasonlóképpen a $BCD_\triangle$-ből

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_2-\beta_2}{2}=\frac{(b-c)\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{b+c}=\frac{2{,}063\ \operatorname{cotg}\ 37^\circ41'}{30{,}945},$$

amiből

$$\frac{\delta_2-\beta_2}{2}=4^\circ56',$$

vagyis

$$\delta_2-\beta_2=9^\circ52',$$

és mivel

$$\delta_2+\beta_2=180^\circ-\gamma=104^\circ38',$$

azért

$$\delta_2=57^\circ15' \quad \text{és} \quad \beta_2=47^\circ23'.$$

Tehát

$$\beta=\beta_1+\beta_2=85^\circ50',$$

és

$$\delta=\delta_1+\delta_2=126^\circ12'.$$

Rockenbauer Magda (Bp. X., I. László g. III.)