I. megoldás: Mivel α hegyesszög, azért egyenlőtlenségünk mindkét oldala pozitív, tehát négyzetre emelhető, vagyis elegendő a következő egyenlőtlenséget igazolni:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \le 2.$$

De

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

és így

$$\sin 2\alpha \le 1,$$

ami nyilván igaz. Az egyenlőségi jel akkor érvényes, ha $\alpha = 45^\circ$.

Marik Miklós (Bp. I., Fürst S. g. II. o. t.)

II. megoldás:

Az α hegyesszög mindig ilyen alakban írható

$$\alpha = 45^\circ \pm \beta, \quad \text{ahol} \quad 0 \le \beta < 45^\circ.$$

Tehát

(1) $$\sin\alpha = \sin 45^\circ \cos\beta \pm \cos 45^\circ \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\beta \pm \sin\beta)$$

(2) $$\cos\alpha = \cos 45^\circ \cos\beta \mp \sin 45^\circ \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\beta \mp \sin\beta)$$

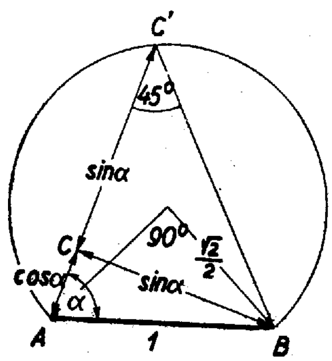
(1) és (2) összege:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\beta$$

Tehát $\sin\alpha + \cos\alpha$ lehető legnagyobb értéke $\sqrt{2}$, midőn $\cos\beta = 1$, vagyis $\beta = 0^\circ$ és így $\alpha = 45^\circ$.

Zawadowski Alfréd (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás: Vegyünk fel egy $AB = 1$ szakaszt és rajzoljuk meg azt a körívet, amelynek pontjaiból az AB távolság 45° alatt látszik. (1. ábra.)



1. ábra

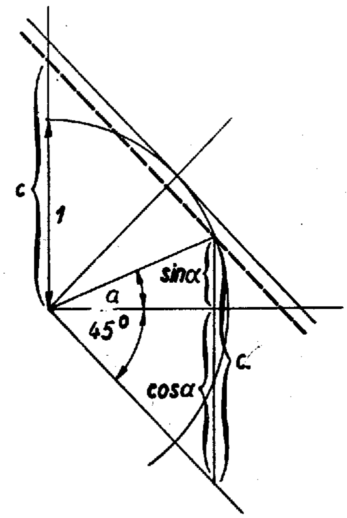
Mivel a középponti szög 90°, azért a látókörív sugara $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB$ fölé ABC derékszögű háromszöget szerkesztve, melynek A-nál levő szöge *tetszőleges* α, akkor $AC = \cos\alpha$ és $BC = \sin\alpha$. Messe az AC befogó meghosszabbítása a látókörívet C' pontban, akkor a keletkezett BCC' derékszögű háromszög egyenlő szárú, mert $C'\sphericalangle = 45^\circ$, vagyis $CC' = CB = \sin\alpha$. Tehát $AC' = \sin\alpha + \cos\alpha$. Ha α változik, az AC' húr is változik, de mindig kisebb marad az átmérőnél, $\sqrt{2}$-nél. A legnagyobb értéket $\sin\alpha + \cos\alpha = AC'$ akkor éri el, ha AC' átmérő, vagyis $AC' = \sqrt{2}$ és ez esetben $\alpha = 45^\circ$. (Az 1. ábrából még leolvasható, hogy ha α hegyesszög, akkor $AC' = \sin\alpha + \cos\alpha$ minimális értéke 1, midőn $\alpha = 90^\circ$.)

Vigassy József (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

IV. megoldás: Próbáljuk grafikusan megoldani a

$$\sin\alpha + \cos\alpha = c$$

egyenletet, ahol c megadott konstans érték. (2. ábra) A c-hez tartozó α szöget úgy nyerjük, hogy a »-45°-os« szög mozgó szárát önmagával párhuzamosan eltoljuk c távolsággal.



2. ábra

Az eltolt egyenes (ábránkon vonalkázva), általában 2 pontban metszi a negyedkört, tehát 2 megoldást kapunk α-ra. A c-t változónak tekintve, α-ra hegyesszögű megoldás a c változónak csak bizonyos intervallumában van: c legkisebb értéke 1, mikor is $\alpha_1 = 0°$ és $\alpha_2 = 90°$ és legnagyobb értéke pedig midőn $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$, vagyis az eltolt egyenes érinti a negyedkört. Ez esetben $c = \sqrt{2}$. Tehát ha α hegyesszög

$$1 \leq \sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}.$$

Megjegyzés: Ha elejtjük azt a követelményt, hogy a hegyesszög, akkor ábránkból rögtön látható, hogy

$$-\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2}$$

esetén van megoldás.

Kovács László (Debrecen, Ref. g. II. o. t.)