*a)* **I. megoldás:** 14 lépés esetén a bástya mindig csak a szomszédos mezőre léphet – jobbra, vízszintes irányban, vagy előre függőleges irányban, mert $a1$-től $h8$-ig összesen 7–7 egységlépést kell tennie mindkét irányban. Ha a vízszintes lépést $a$-val és a függőleges lépést $b$-vel jelképezzük; akkor egy tetszőlegesen kiragadott utat például így jelezhetünk: *abbabaabbbaaba*. Tehát minden útnak az *aaaaaaabbbbbbb* elemeknek egy permutációja felel meg és megfordítva: az említett permutációk mindegyikének egy út.

Ezek szerint az összes lehetséges utak száma (14 lépésben):

$$P_{14}^{7,7} = \frac{14!}{7!\,7!} = 3432$$

*Marik Miklós* (Bp. I., Fürst S. g. II. o. t.)

**II. megoldás:** Minden mezőbe írjuk be az összes arra vezető utak számát elölről kezdve folytatólagosan. Ez utóbbi számot nyilván úgy kapjuk meg, ha összeadjuk abba a két mezőbe írt számot, amely két mezőről az illető mezőre léphettünk. (1. ábra)

VII VIII IX X XI XII XIII XIV

VI V IV III II I

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 |
| 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 416 | 792 |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*1. ábra*

Kiindulás: $b1$- és $a2$-be 1-et írunk s. i. t. a fenti szabály szerint. Ennek alapján a beírt számok olyan Pascal-féle háromszöget alkotnak, amelynek az $a1$ mező a csúcsa és melyben az $a2-b1$, $a3-c1$, $a4-d1$, $a5-e1$ stb. átlók a sorai. A $h8$ mezőbe tehát a 14. sor 8-ik tagja kerül:

$$\binom{14}{7} = 3432$$

(L. lapunk III. évf. 325. sz. feladatát a 230. oldalon).

*Németh László* (Gyula, Erkel F. g. IV. o. t.)

**III. megoldás:** Az $a8-h1$ átló *egyes* mezeire a bástya $a1$-ből kiindulva feltételünknek megfelelően $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}\dots\binom{7}{6}$, $\binom{7}{7}$-féleképpen juthat el (L. előbbi megoldást és 1. ábrát.) Minden egyes mezőről a bástya nyilván ugyanannyiféleképpen mehet el $h8$-ra, ahányféleképpen eljutott az $a8-h1$ átló illető mezejére. Tehát az összes lehetséges utak száma

$$\binom{7}{0}^2+\binom{7}{1}^2+\binom{7}{2}^2+\ldots+\binom{7}{6}^2+\binom{7}{7}^2=$$
$$=2(1^2+7^2+21^2+35^2)=2\cdot 1716=3432.$$

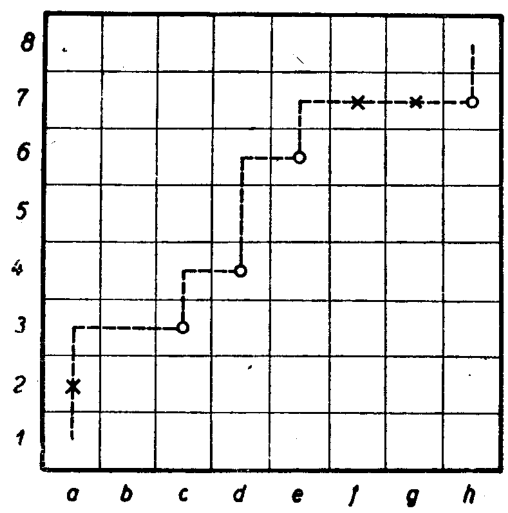
Ennek a megoldásnak az az előnye, hogy egyszersmind megadja az $a8-h1$ átló minden egyes mezejére nézve külön-külön az illető mezőn átvonuló utak számát. Pl. $f3$-on $\binom{7}{5}^2=\binom{7}{2}^2=21^2=441$ út vonul át.

*Tahy Péter* (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

**IV. megoldás:** Állapítsuk meg egy tetszőleges $n$ lépésszámra érvényes képletet, ahol $n$ – az értelmezésből kifolyólag – természetes szám, melyre nézve $2 \le n \le 14$.

Először is nyilvánvaló, hogy elég azokat az utakat megszámlálni, amelyekben az első lépés függőleges, mert ezen utaknak az $a1 - h8$ átlóra vonatkozó tükörképei szolgáltatják a vízszintes kezdőlépésű utakat és fordítva. Tehát az összes utak száma: az előbbi kikötés mellett megszámlált utak kétszerese.

Mivel az utolsó lépés *mindig* $h8$-ra történik, ezért pl. valamely 12 lépéses út jelölésére elég azt a 11 mezőt megadni, amely mezőkön egy-egy lépés végződik. Valamely tetszőleges 12 lépéses utat pl. a következő 11 lépésvégponttal jelölhetünk a sakktábla mezeinek szokásos jelölését használva: $a2 - a3 - c3 - c4 - d4 - d6 - e6 - e7 - f7 - g7 - h7$. (2. ábra.)




*2. ábra*

A lépésvégpontok lehetnek olyan pontok, amelyekben irányváltozás történik és olyanok amelyekben nem történik irányváltozás. Ez előbbieket nevezzük *törés*pontoknak. Ezeknek számát $k$-val jelölve, $n$ lépés esetén $1 \le k \le n-1$. Az utóbbiakat nevezzük *megállók*-nak. Ezeknek számát nyilvánvalóan megkapjuk, ha az $n-1$ lépés-végpontból a töréspontok számát levonjuk: $n-1-k$. (Ha $k = n-1$, akkor nincs megálló). A fenti példában 8 töréspontot találunk: $a3$, $c3$, $c4$, $d4$, $d6$, $e6$, $e7$, $h7$ és $11 - 8 = 3$ megállót: $a2$, $f7$ és $g7$. (Az ábrában fekvő kereszttel jelölve).

A töréspontok teljesen meghatározzák az útvonalat (nem az utat, mert az út ismeretéhez még a megállók ismerete is szükséges), sőt elég pl. a vízszintes lépések végpontjainál lévő $\frac{8}{2} = 4$ töréspontot megadni (az ábrában nullkörrel jelölve), hogy az útvonal meg legyen határozva. Ezek szerint a fenti 12 lépéses út (függőleges indulást feltételezve) megadható a következő szimbólumokkal

$$c3,\ d4,\ e6,\ h7;\ a2,\ f7,\ g7.$$

Mivel a töréspontok száma jelen példában *páros*, azért az utolsó, vízszintes lépés végpontjában lévő töréspont, *szükségképpen mindig* a $h$ oszlopba kerül és így »$h7$« helyett elég 7-et írni.

Tehát a

$$c3,\ d4,\ e6,\ h7;\ a2,\ f7,\ g7$$

szimbólumok teljesen megadják a fenti 12 lépéses utat, mégpedig a pontosvessző előtt álló szimbólumok meghatározzák az *útvonalat*, a pontosvessző után álló jelek pedig a *megállókat* adják meg.

Az útvonalat részben megadó $c$, $d$, $e$ szimbólumok nem egyebek, mint a $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ elemeknek egy harmad osztályú kombinációja, az útvonalat másik részben megadó 3, 4, 6, 7 elemek pedig nem egyebek, mint a 2, 3, 4, 5, 6, 7 elemeknek egy negyed osztályú kombinációja.

Minden útvonal – a kezdőpontot és végpontot nem számítva – kivétel nélkül 13 mezőn halad át, tehát ha 13-ból levonjuk a töréspontok számát ($k$; jelen példánkban $k = 8$), akkor a fennmaradó $13 - k$, jelen esetben $13 - 8 = 5$ mezőn helyezkedhetik el az $(n-1-k)$ számú, jelen esetben $11 - 8 = 3$ megálló. Tehát a megállókat megadó 3 mező: $a2$, $f7$, $g7$ nem egyéb, mint az $a2$, $b3$, $d5$, $f7$, $g7$ öt mezőnek egy harmadosztályú kombinációja.

Mivel az itt szereplő 3 fajta kombinációs csoport mindegyikének bármely kombinációja kapcsolható egy másik kombinációs csoport bármely kombinációjával, azért az összes lehetséges utak számát megkapjuk, ha a 3 fajta kombinációknak számát összeszorozzuk.

Ezek szerint tehát a 12 lépéses és 8 törésponttal bíró utak száma

$$U_{12,8} = 2 \cdot \binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{5}{3} = 2 \cdot \binom{6}{\frac{8-2}{2}}\binom{6}{\frac{8}{2}}\binom{13-8}{11-8}$$

Általában, ha a lépés szám $n$ és a töréspontok száma $k$ *páros* $(2 \le k \le n-1)$, akkor

$$U_{n,k} = 2\cdot\binom{6}{\frac{k-2}{2}}\binom{6}{\frac{k}{2}}\binom{13-k}{n-k-1}.$$

Ha a töréspontok száma *páratlan* ($1\le k\le n-1$), akkor az utolsó töréspont (továbbra is függőleges kezdőlépést feltételezve) szükségképpen mindig egy függőleges lépés végpontja a 8. sorban. A függőleges lépések végpontjaiban lévő töréspontok száma tehát $\frac{k+1}{2}$ a vízszintes lépések végén lévő töréspontok száma pedig $\frac{k-1}{2}$. Ez utóbbiakat megadó szimbólumok egyrészt a

$$b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$$

elemeknek, másrészt a

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

elemeknek egy $\frac{k-1}{2}$-ed osztálya kombinációja. Vagyis *páratlan* $k$ esetén

$$U_{n,k} = 2\cdot\binom{6}{\frac{k-1}{2}}^2\binom{13-k}{n-k-1}.$$

A nyert két képlet egyesíthető a $[x]$ jelölés bevezetésével (olvasd: $x$ egész része« v.entier [antjé] $x$), amely az $x$-ben foglalt legnagyobb *egész* számot jelenti.

Ugyanis, ha $k$ *páros*, akkor

$$\frac{k-2}{2} = \left[\frac{k-1}{2}\right] \quad \text{és} \quad \frac{k}{2} = \left[\frac{k}{2}\right],$$

ha pedig $k$ *páratlan*, akkor

$$\frac{k-1}{2} = \left[\frac{k-1}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right],$$

és így

$$U_{n,k} = 2\cdot\binom{6}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{6}{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{13-k}{n-k-1},$$

ahol $n=2,\,3,\,\ldots,\,14$ és $k=1,\,2,\,\ldots,\,n-1$.

Az összes $n$ lépéses utak számát, $U_n$-et megkapjuk, ha rendre kiszámítjuk az utak számát $k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n-1$ töréspont esetén és az így nyert eredményeket összeadjuk. Tehát

$$U_n = 2\sum_{k=1}^{n-1}\binom{6}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{6}{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{13-k}{n-k-1}.$$

Képletünket jelen esetre alkalmazva, amidőn $n=14$

$$U_{14} = 2\sum_{k=1}^{13}\binom{6}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{6}{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{13-k}{13-k},$$

vagyis

$$\frac{1}{2}U_{14} = \binom{6}{0}^2+\binom{6}{0}\binom{6}{1}+\binom{6}{1}^2+\binom{6}{1}\binom{6}{2}+\binom{6}{2}^2+\binom{6}{2}\binom{6}{3}+\binom{6}{3}^2+\binom{6}{3}\binom{6}{4}+$$
$$+\binom{6}{4}^2+\binom{6}{4}\binom{6}{5}+\binom{6}{5}^2+\binom{6}{5}\binom{6}{6}+\binom{6}{6}^2 = 2(1+6+36+90+225+300)+400 = 1716,$$

és így

$$U_{14} = 2\cdot 1716 = 3432.$$

*Dömölki Bálint* (Bp. IX., Apácai Csere János g. III. o. t.)

*b)* **I. megoldás:** Ha 12 lépésben akarunk $h8$-ra jutni, akkor vagy kétszer kell 2 egységnyit lépni, vagy egyszer 3 egységnyit. Ha az utóbbi lépéseket $a_2$, $b_2$ illetőleg $a_3$, $b_3$-mal jelöljük, akkor a következő elemek permutációjáról van szó:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | $a_2$ | $a_2$ | | | b | b | b | b | b | b | b |
| a | a | a | a | $a_3$ | | | b | b | b | b | b | b | b |
| a | a | a | a | a | $a_2$ | | b | b | b | b | b | $b_2$ | |
| a | a | a | a | a | a | a | b | b | b | b | $b_3$ | | |
| a | a | a | a | a | a | a | b | b | b | $b_2$ | $b_2$ | | |

Tehát

$$U_{12}=2P_{12}^{2,3,7}+P_{12}^{4,7}+P_{12}^{5,5}=2\cdot\frac{12!}{2!\,3!\,7!}+2\cdot\frac{12!}{4!\,7!}+\frac{12!}{5!\,5!}=57\,024.$$

*Deseő Zoltán* (Bp. X., I. László g. II. o. t.)

**II. megoldás:** Alkalmazzuk az *a)* IV. megoldásánál nyert képletet:

$$\frac{1}{2}U_{11}=\sum_{k=1}^{11}\binom{6}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{6}{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{13-k}{11-k}=$$
$$=\binom{12}{10}+6\binom{11}{9}+36\binom{10}{8}+90\binom{9}{7}+225\binom{8}{6}+300\binom{7}{5}+400\binom{6}{4}+300\binom{5}{3}+$$
$$+225\binom{4}{2}+90\binom{3}{1}+36\binom{2}{0}=66+330+1620+3240+6300+6300+6000+$$
$$+3000+1350+270+36=28\,512,$$

amiből

$$U_{12}=57\,024.$$

*c)* **I. megoldás:**

Egy irányban 2 lépést a másik irányban 3 lépést megtéve az

$$\begin{array}{ll} a\ \ a_6 & \qquad b\ \ b\ \ b_5\\ a_2\ a_5 & \qquad b\ \ b_2\ b_4\\ a_3\ a_4 & \qquad b\ \ b_3\ b_3\\ & \qquad b_2\ b_2\ b_3 \end{array}$$

esetek lehetségesek.

Az első csoport minden sorát a második csoport minden sorával összekapcsolva és az így nyert 5 elemet esetről-esetre permutálva $3P_5+9P_5^2$ számú utat kapunk, amely számot – $a$ és $b$ felcserélhetősége miatt – még 2-vel meg kell szorozni. Tehát ez esetben az utak száma $6P_5+18P_5^2$.

Egy irányban 1 lépést a másik irányban 4 lépést megtéve az

$$\begin{array}{ll} a_7 & \qquad b\ \ b\ \ b\ \ b_4\\ & \qquad b\ \ b\ \ b_2\ b_3\\ & \qquad b\ \ b_2\ b_2\ b_2 \end{array}$$

esetek lehetségesek.

Az utak száma ez esetben $2(P_5^2+2P_5^3)=2P_5^2+4P_5^3$.

Tehát az összes utak száma

$$U_5=6P_5+20P_5^2+4P_5^3=6\cdot 51+20\cdot\frac{5!}{2!}+4\cdot\frac{5!}{3!}=$$
$$=720+1200+80=2000.$$

**II. megoldás:** A *a)* IV. megoldásnál nyert képletet alkalmazva:

$$\frac{1}{2}U_5=\sum_{k=1}^{4}\binom{6}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{6}{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{13-k}{4-k}=\binom{12}{3}+6\binom{11}{2}+36\binom{10}{1}+90\binom{9}{0}=$$
$$=220+330+360+90=1000,$$

és így

$$U_5=2\cdot 1000=2000.$$