

Jelöljük a keletkező forgástestek felszínét és köbtartalmát rendre  $F_a, F_b, F_c$ -vel, ill.  $K_a, K_b, K_c$ -vel.

a) A derékszögű háromszöget az  $A$  csúcsponton átmenő, az  $a$  befogóval párhuzamos tengely körül forgatva, az  $a$  befogó egy forgáshenger-palástot, a  $b$  befogó körlapot, a  $c$  átfogó pedig forgáskúp-palástot ír le.

$$\text{Tehát } F_a = 2b\pi \cdot a + b^2\pi + bc\pi = b\pi(2a + b + c).$$

A keletkezett forgástest köbtartalma egy forgáshenger és egy forgáskúp különbségeként adódik. A kúp a hengernek  $\frac{1}{3}$  része, tehát a forgástest keresett köbtartalma a henger köbtartalmának  $\frac{2}{3}$ -ad része, vagyis

$$K_a = \frac{2}{3}b^2\pi \cdot a = \frac{2}{3}ab^2\pi.$$

b) Hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$F_b = 2a\pi \cdot b + a^2\pi + ac\pi = a\pi(a + 2b + c)$$

és

$$K_b = \frac{2}{3}a^2b\pi.$$

c) A  $C$  csúcsponton átmenő és a  $c$  átfogóval párhuzamos egyenes körül forgatva a háromszöget, az  $a$  és  $b$  befogók forgáskúp-palástot, a  $c$  átfogó pedig forgáshenger-palástot ír le, mely kúpok, ill. henger alapkörének sugara az átfogóhoz tartozó magasság:  $m$ . Tehát

$$F_c = am\pi + bm\pi + 2m\pi \cdot c = m\pi(a + b + 2c).$$

De mivel derékszögű háromszögünknek kétszeres területe  $cm = ab$ , azért  $m = \frac{ab}{c}$  és így

$$F_c = \frac{ab\pi}{c}(a + b + 2c).$$

A  $K_c$  pedig az előbbieket alapján ismét a  $c$  oldal által leírt forgáshenger köbtartalmának  $\frac{2}{3}$ -ad része, vagyis

$$K_c = \frac{2}{3}m^2\pi \cdot c = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \pi c = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2b^2\pi}{c}.$$

Ha  $a = b$ , akkor  $c = a\sqrt{2}$ , és így

$$F_a = F_b = a\pi(3a + a\sqrt{2}) = a^2\pi(3 + \sqrt{2}),$$

és

$$F_c = \frac{a^2\pi}{a\sqrt{2}}(2a + 2a\sqrt{2}) = 2a^2\pi \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a^2\pi(2 + \sqrt{2}).$$

Tehát

$$F_a : F_b : F_c = 1 : 1 : \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}.$$

De

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7},$$

és így

$$F_a : F_b : F_c = 1 : 1 : \frac{4 + \sqrt{2}}{7} (\sim 0,7735).$$

Ugyancsak  $a = b$  esetén

$$K_a = K_b = \frac{2}{3}a^3\pi,$$

és

$$K_c = \frac{2}{3} \frac{a^4\pi}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \cdot \pi.$$

Tehát

$$K_a : K_b : K_c = 1 : 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} (\sim 0,7071).$$