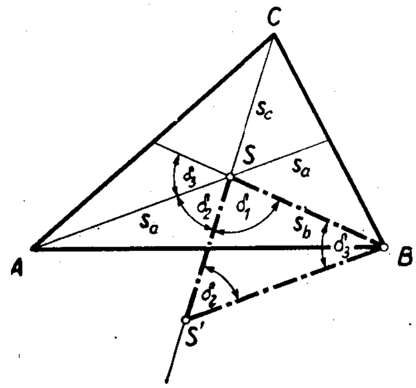
I. megoldás: Legyenek az $ABC_\triangle$ súlyvonalai rendre s_a, s_b, s_c, súlypontja S. Jelölje a súlyvonalak által bezárt hegyes szögeket rendre δ_1 (s_b és s_c szöge), δ_2 (s_a és s_c szöge) és δ_3 (s_a és s_b szöge). (L. ábrát.) Az S pont centrális tükörképe az AB oldal felezőpontjára nézve legyen S'.



A bebizonyítandó tételünk

$$\frac{s_a}{\sin\delta_1}=\frac{s_b}{\sin\delta_2}=\frac{s_c}{\sin\delta_3},$$

vagyis másképpen írva

$$s_a:s_b:s_c=\sin\delta_1:\sin\delta_2:\sin\delta_3.$$

Az $ASBS'$ négyszög paralelogramma, mert az átlók felezik egymást. Az $SS'B_\triangle$-ben az $S\sphericalangle=\delta_1$, az $S'\sphericalangle=\delta_2$ (mint váltószög) és a $B\sphericalangle=\delta_3$ (mint megfelelő szög). Az $SS'B_\triangle$ oldalai pedig rendre a súlyvonalak $\frac{2}{3}$-ad részei, mert ismeretes, hogy a S a súlyvonalakat $2:1$ arányban osztja. Az $SS'B_\triangle$-re alkalmazott sinus-tétel szolgáltatja tételünk állítását.

Horváth Jenő (Celldömölk, Gábor Áron g. III. o. t.)

II. megoldás: Ha az $ABC_\triangle$ területét T-vel, a $BCS_\triangle$, $ACS_\triangle$ és $ABS_\triangle$ háromszögek területeit pedig rendre t_1, t_2, ill. t_3-mal jelöljük, akkor ismeretes, hogy

$$t_1=t_2=t_3=\frac{T}{3}. \tag{1}$$

A területképletet felhasználva:

$$t_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}s_b\cdot\frac{2}{3}s_c\sin\delta_1=\frac{2}{9}s_bs_c\sin\delta_1,$$
$$t_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}s_a\cdot\frac{2}{3}s_c\sin\delta_2=\frac{2}{9}s_bs_c\sin\delta_2.$$

(1) alapján

$$\frac{2}{9}s_bs_c\sin\delta_1=\frac{2}{9}s_as_c\sin\delta_2,$$

vagyis

$$s_b\sin\delta_1=s_a\sin\delta_2,$$

amiből

$$\frac{s_a}{\sin\delta_1}=\frac{s_b}{\sin\delta_2}.$$

Teljesen hasonlóképpen bizonyítható, hogy $\frac{s_b}{\sin\delta_2}=\frac{s_c}{\sin\delta_3}$.

Kardos Péter (Szolnok, 16. sz. gépip. techn. II. o. t.)