I. megoldás: Azt kell kimutatni, hogy $n(n^2+23)$ szorzat – ha n páratlan – mindig osztható 3-mal és 8-cal, mert ebből következik, lévén 3 és 8 relatív prím, hogy $3\cdot 8=24$-gyel is osztható.

n, mint minden páratlan szám, csak $4k\pm 1$ alakú lehet, de akkor

$$n^2+23=(4k\pm 1)^2+23=16k^2\pm 8k+24=8(2k^2\pm k+3),$$

vagyis szorzatunk osztható 8-cal. Másrészt n, mint páratlan szám *csakis* $3k$ vagy $6k\pm 1$ alakú lehet.

Az első esetben szorzatunk első tényezője osztható 3-mal. A második esetben a második tényező

$$n^2+23=(6k\pm 1)^2+23=36k^2\pm 12k+24$$

osztható 3-mal. Mivel n-re nézve mindkét esetben minden lehetőséget kimerítettünk tételünket bizonyítottuk.

Mercz Ferenc (Pannonhalmi g. II. o. t.)

II. megoldás: Teljes indukcióval is bizonyíthatunk. Feladatunk szerint $n=2k+1$ alakú. $k=0$, vagyis $a=1$ esetén tételünk igaz, mert $1^3+23=24$. Tegyük fel, hogy k-ra, vagyis $n=2k+1$-re tételünk igaz, vagyis

$$(2k+1)^3+23(2k+1)=8k^3+12k^2+52k+24=24A,$$

ahol A egész szám. Megmutatjuk, hogy ez esetben $k+1$-re, vagyis $n=2k+3$-ra is áll tételünk.

$$\begin{gathered}(2k+3)^3+23(2k+3)=8k^3+36k^2+54k+27+46k+69=8k^3+36k^2+100k+96=\\=(8k^3+12k^2+52k+24)+(24k^2+48k+72)=24A+24(k^2+2k+3).\end{gathered}$$

Tehát tételünk tényleg igaz $k+1$-re, ha k-ra igaz. $k=0$-ra, mint láttuk, igaz, tehát igaz k minden egész számú értékére, vagyis $n(=2k+1)$ minden páratlan értékére.

Németh László (Gyula, Erkel Ferenc g. IV. o. t.)

III. Megoldás: $n^3+23n=n^3+24n-n=24n+n(n^2-1)=24n+(n-1)n(n+1)$.

Csak a második tagról kell megmutatni, hogy osztható 24-gyel. Mivel n páratlan, azért $n-1$ és $n+1$ két egymásután következő páros szám, tehát egyikük osztható 4-gyel, vagyis szorzatunk osztható 8-cal. Másrészt három egymásután következő szám: $n-1$, n, $n+1$, közül az egyik szükségképpen osztható 3-mal. Mivel 3 és 8 viszonylagos törzsszámok, azért második tagunk 3 és 8 szorzatával, vagyis 24-gyel osztható.

Horváth Mária (Sopron, József Attila lg. III. o. t.)