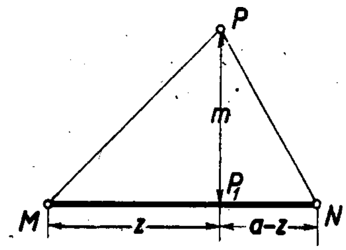
I. megoldás: Legyenek M és N az adott távolság végpontjai és P egy a feltételt teljesítő pont. Bocsássunk P-böl merőlegest az MN egyenesre. A metszéspontot jelöljük P_1-gyel. Legyen $PP_1 = m$, $MP_1 = z$, $P_1N = a - z$, $PM = u$ és $PN = v$.



A feltétel szerint $u^2 - v^2 = k^2$ (vagy $v^2 - u^2 = k^2$).

De Pythagoras-tétele alapján

$$u^2 = m^2 + z^2,$$
$$v^2 = m^2 + a^2 - 2az + z^2,$$

és így

$$u^2 - v^2 = 2az - a^2 = k^2,$$

amiből

$$z = \frac{a^2 + k^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{k^2}{2a}$$

Mivel a és k^2 megadott mennyiségek, azért z (m-től független) állandó, vagyis minden P pont, melynek merőleges vetülete P_1, eleget tesz a követelménynek. Tehát a mértani hely ($u > v$ esetén) egy MN-re merőleges egyenes, melynek talppontja az MN felezőpontjától $\frac{k^2}{2a}$ távolságnyira van N irányában.

$$z < v \quad \text{esetén} \quad v^2 - u^2 = a^2 - 2az = k^2,$$

amiből

$$z = \frac{a}{2} - \frac{k^2}{2a}$$

Tehát az előbbi egyenesnek centrális tükörképe az MN felezőpontjára is a mértani helyhez tartozik a feladat szövegezése szerint. Evidens, hogy minden olyan pont, amely nincs rajta ezeken az egyeneseken, nem felelhet meg a feltételeknek.

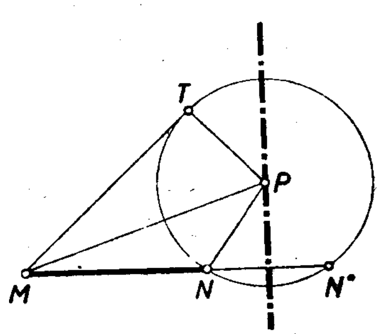
$$k^2 = 0 \quad \text{esetén} \quad z = \frac{a}{2},$$

és így az MN távolság felezőmerőlegese a mértani hely.

Durst Endre (Szolnok, Beloiannisz g. IV. o. t.)

Teljes megoldásnak fogadtuk el azokat a megoldásokat is, amelyek csak egy esetet ($u > v$ vagy $u < v$) tárgyaltak.

II. megoldás: Legyen P egy pont, melyre nézve $PM^2 - PN^2 = k^2$. Rajzoljunk P körül PN sugárral kört, mely az MN egyenest az N ponton kívül még az N^* pontban is metszi. (N^* azonos N-nel, ha $k^2 = a^2$ és N^* azonos M-mel, ha $k^2 = 0$.)



M-ből a körhöz szerkesztett MT érintőszakaszra áll, hogy

$$MT^2 = PM^2 - PT^2 = PM^2 - PN^2 = k^2.$$

Mindazon körökre nézve, melyek átmennek az N és N^* pontokon k^2 $(= PM^2 - PN^2)$, mint az M pont hatványa, állandó.

Ezen körök P középpontjainak geometriai helye az NN^* húr felezőmerőlegese.

(Ha a $PN^2 - PM^2 = k^2$ követelményt vesszük figyelembe, akkor megkapjuk a fentebb említett szimmetrikusan fekvő egyenest.)

Bárdos András (Bp., II., Rákóczi g. I o. t.)