

I. megoldás: Két pozitív szám akkor és csak akkor egyenlő, ha logaritmusuk egyenlő. Vesszük mindkét oldal 10-alapú logaritmusát:

$$\begin{aligned}\lg x(\lg x - \lg 2) &= 4 + \lg 4, \\ (\lg x)^2 - \lg 2 \cdot \lg x - (4 + 2 \lg 2) &= 0.\end{aligned}$$

Ez másodfokú egyenlet $\lg x$ -re, amiből

$$\begin{aligned}\lg x &= \frac{\lg 2 \pm \sqrt{(\lg 2)^2 + 8 \lg 2 + 16}}{2} = \frac{\lg 2 \pm (\lg 2 + 4)}{2} \\ \lg x_1 &= \frac{2 \lg 2 + 4}{2} = \lg 2 + 2, \\ \lg x_2 &= \frac{-4}{2} = -2.\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}x_1 &= 10^{2+\lg 2} = 10^2 \cdot 10^{\lg 2} = 100 \cdot 2 = 200. \\ x_2 &= 10^{-2} = \frac{1}{100}.\end{aligned}$$

II. megoldás: A $\lg x$ -re kapott másodfokú egyenletet átalakítjuk:

$$\begin{aligned}(\lg x)^2 - 4 - \lg 2 \cdot \lg x - 2 \lg 2 &= 0, \\ (\lg x + 2)(\lg x - 2) - \lg 2(\lg x + 2) &= 0. \\ (\lg x + 2)\text{-t kiemelve :}\end{aligned}$$

$$(\lg x + 2)(\lg x - 2 - \lg 2) = 0$$

De egy szorzat csak akkor 0, ha egyik tényezője 0. Tehát

$$\lg x_1 = 2 + \lg 2, \quad \text{amiből } x_1 = 200$$

vagy

$$\lg x_2 = -2, \quad \text{amiből } x_2 = \frac{1}{100}$$

III. megoldás: Tegyük x helyébe 10^y -t.

$$\begin{aligned}\left(\frac{10^y}{2}\right)^y &= 4 \cdot 10^4, \\ \frac{10^{y^2}}{2^y} &= 2^2 \cdot 10^4, \\ \frac{10^{y^2}}{10^4} &= 2^y \cdot 2^2,\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}10^{y^2-4} &= 2^{y+2} \\ (10^{y-2})^{y+2} &= 2^{y+2}\end{aligned}$$

Két pozitív szám $(y+2)$ -edik hatványa egyenlő:

1. ha az alapok egyenlők, vagy
2. ha a kitevő 0.

Innen.

$$10^{y-2} = 2, \quad \frac{10^y}{10^2} = 2, \quad x_1 = 10^y = 200$$

és

$$y + 2 = 0, \quad y_2 = -2, \quad x_2 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$