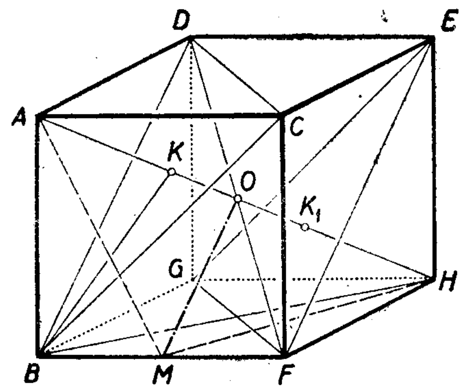
Betűzés az ábra szerint.



Mivel a kocka élhossza 1, azért a lapátló $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ és a testátló $\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$.

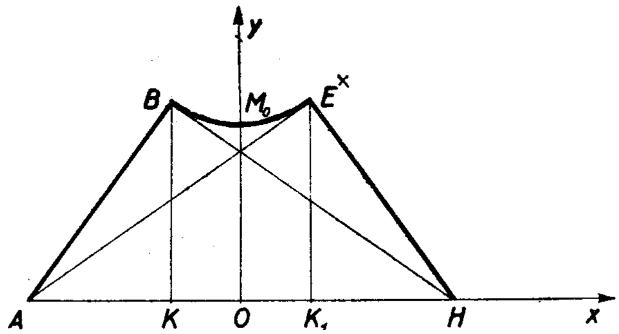
Ha a kockát pl. az AH testátló körül forgatjuk, akkor az A pontból kiinduló 3 él (illetőleg a 3 él mindegyike külön-külön) egy forgáskúp testet ír le, melynek csúcspontja A, alapköre a BCD szabályos háromszög köré írt, K középpontú kör és magassága $m=AK$. Mivel a BCD szabályos háromszög oldalhossza $\sqrt{2}$, azért a köré írt kör sugara (a szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$-ad része) $r=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. $\Big($Az $r=BK$ távolság az ABH derékszögű háromszögből, az átfogóhoz tartozó magasságként is kiszámítható: $BK:AB=BH:AH$ vagyis $r:1=\sqrt{2}:\sqrt{3}$, miből $r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\Big)$. Az $m=AK$ kúpmagasság az ABH derékszögű háromszögből számítható ki, mint az AB befogónak vetülete az AH átfogón. Tehát $AK:AB=AB:AH$, vagyis $m:1=1:\sqrt{3}$, miből $m=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. A forgáskúp térfogata

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot r^2\pi\cdot m=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{6\sqrt{3}}{81}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

Ugyanez áll természetesen a H csúcspontból kiinduló 3 kockaél által leírt forgáskúpra is, és így e két kúp köbtartalma

$$2V_1=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$$

A kocka többi 6 éle (illetőleg e 6 él mindegyike) egy egyköpenyű forgáshiperboloidot ír le. Az él, mint szakasz, által leírt hiperboloidfelület is az él végpontjai által leírt két kör lapja által (e két körlap az előbbi két forgáskúp alapköre) határolt forgástest térfogatát: V_2-t integrálással számítjuk ki. Evégből helyezzük egész forgástestünk ABE^*H meridiánját egy derékszögű koordináta rendszer síkjába úgy, hogy a kocka középpontja, vagyis az AH felezőpontja O az origóba kerül és az AH forgástengely az x tengellyel esik egybe. Akkor y a meridián szimmetria tengelye, melyen rajta van a hiperbola valós tengelye. E^* az E pontnak 180 fokos elforgatása. Mint láttuk $AK=HK_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ és így $KK_1=\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}=AK=HK_1$, vagyis a K és K_1 pont az AH forgástengelyt 3 egyenlő részre osztja. $OK=OK_1=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Jelöljük a hiperbola fél-valóstengelyét OM_0-val. OM_0 nem egyéb, mint az O kockaközéppontnak távolsága az említett 6 él bármelyikétől pl. BF-től. E távolság azonos az O-nak a BF él felezőpontjától, M-től való távolságával, mert hiszen $OM\perp BF$. Az OM azonkívül, mint az AMH egyenlő szárú háromszög magassága, az AH-ra is merőleges. (A reálisták felismerik, hogy OM az AH forgástengely és a BF él normál-transzverzálisa.) Az MOH derékszögű háromszögből $OM^2=AM^2-AO^2$, de $AM^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$, és $AO^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ és így $OM^2=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, vagyis $OM=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(Azok, akik ábrázoló geometriát tanultak, erre az eredményre úgy is juthatnak, visszaemlékezve a kocka ábrázolására, ha meggondolják, hogy a kockát az AH csúcstengellyel párhuzamos irányból vetítve a csúcstengelyre merőleges síkra, a hiperboloidot leíró 6 él vetülete szabályos hatszög, amely köré írt kör sugara a fenti $r=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Az OM sugarú kör egybevágó vetületével, amely e szabályos hatszögbe írt kör és így sugara

$$OM=OM_0=\frac{1}{2}r\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{18}}{6}=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Bigg).$$

A meridián síkban fekvő hiperbola egyenlete:
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, ahol a jelenti a valóstengely felét, vagyis $a=OM_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezt az értéket behelyettesítve, nyerjük

$$2y^2-\frac{x^2}{b^2}=1$$

b^2 meghatározása úgy történik, hogy a hiperbola egy pontjának, pl. a B pont koordinátáit: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ behelyettesítjük a hiperbola egyenletébe:

$$2\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{12b^2}=1,$$

miből

$$\frac{1}{b^2}=\left(\frac{4}{3}-1\right)\cdot 12=4.$$

Tehát a hiperbola egyenlete

$$2y^2-4x^2=1,$$

vagyis

$$y^2=\frac{4x^2+1}{2}=2x^2+\frac{1}{2}$$

A forgáshiperboloid test térfogata:

$$V_2=\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{6}}y^2dx=2\pi\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{6}}y^2dx=2\pi\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{6}}\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=2\pi\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{6}}=2\pi\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{216}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{108}+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=$$

$$=2\pi\frac{\sqrt{3}+9\sqrt{3}}{108}=2\pi\frac{10\sqrt{3}}{108}=\frac{5\sqrt{3}}{27}\pi.$$

Az egész forgástest térfogata tehát

$$V=2V_1+V_2=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi+\frac{5\sqrt{3}}{27}\pi=\frac{9\sqrt{3}}{27}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Megjegyzés: Forgástestünk térfogata éppen fele azon forgáshenger térfogatának, melynek sugara $BK=r=\frac{\sqrt{6}}{3}$ és magassága $AH=\sqrt{3}$. (A forgástest köré írt henger.)