I. megoldás: A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk.
Ha $n=1$, a tétel igaz, mert így szól $\sin\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi}$.

Feltéve, hogy igaz $n=k$-ra, bebizonyítjuk, hogy igaz $n=k+1$-re is.

Ha n értéke k-ról $k+1$-re nő, az (1) kifejezés baloldalán egy taggal lesz több, ez a tag: $\sin(2k+1)\varphi$. A jobboldal pedig $\dfrac{\sin^2 k\varphi}{\sin\varphi}$-ről $\dfrac{\sin^2(k+1)\varphi}{\sin\varphi}$-re változik. Bizonyítandó tehát, hogy

$$\sin(2k+1)\varphi = \frac{\sin^2(k+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin^2 k\varphi}{\sin\varphi} \tag{2}$$

Alkalmazzuk a következő jelölést $(k+1)\varphi=\alpha$, $k\varphi=\beta$.
Ezután (2) ilyen alakú lesz:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

Ez pedig azonosság, ami rövid számítással kiderül, ha $\sin(\alpha+\beta)$-t és $\sin(\alpha-\beta)$-t az ismert módon kifejezzük α és β szögfüggvényeivel. Ugyanis

$$\begin{gathered}\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \\ = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.\end{gathered}$$

II. megoldás: Szorozzuk mindkét oldalt $2\sin\varphi$-vel, a baloldal lesz:

$$\begin{gathered}2\sin\varphi\sin\varphi + 2\sin\varphi\sin3\varphi + 2\sin\varphi\sin5\varphi + \ldots + \\ +2\sin\varphi\sin(2n-1)\varphi.\end{gathered}$$

Az ismert $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ képlet alapján ez a kifejezés így írható:

$$\begin{gathered}[\cos0 - \cos2\varphi] + [\cos2\varphi - \cos4\varphi] + \ldots + \\ +\big[\cos(2n-2)\varphi - \cos2n\varphi\big] = \cos0 - \cos2n\varphi = \\ = 2\sin n\varphi\sin n\varphi = 2\sin^2 n\varphi.\end{gathered}$$

Ezt kellett bizonyítani.

Kántor Sándor (Debrecen, Ref. Koll. gimn. III. o. t.)