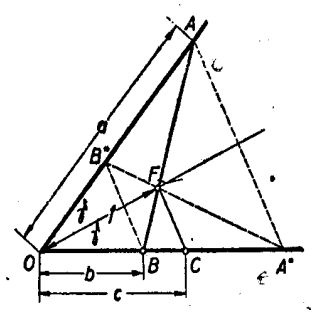
I. megoldás: A feladat megoldásával egyenlő értékű annak bebizonyítása, hogy az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ kifejezés értéke független a szelő irányától.



Tükrözzük a szelőt a szögfelezőre (A^*, B^*) és rajzoljunk F-en át OF-re merőleges egyenest, ez a BFA^* szög szögfelezője lesz és metszi a szög OB szárát a C pontban, OC távolságot jelöljük c-vel, $OA^* = a$-val a tükrözés miatt.

Alkalmazzuk BFA^* háromszögre a szögfelező ismeretes tételét (– a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja –)

$$CB : CA^* = BF : A^*F,$$

azaz

$$(c-b) : (a-c) = BF : A^*F.$$

Hasonló tétel érvényes a háromszög OF külső szögfelezőjére

$$OB : OA^* = BF : A^*F, \quad \text{azaz} \quad b : a = BF : A^*F.$$

E két aránypár összehasonlításával a

$$\frac{c-b}{a-c} = \frac{b}{a},$$

ebből némi átrendezéssel az

$$ac + bc = 2ab$$

egyenlethez jutunk, melyet abc-vel végigosztva,

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2}{c},$$

tehát független a szelő irányától.

II. megoldás. Trigonometriai úton is kimutathatjuk, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ nem függ a szelő irányától. Fejezzük ki az $OAB_\triangle$ területét $OAF_\triangle$ és $OFB_\triangle$ háromszögek területének összegeként (jelöljük OF-et f-fel)

$$\frac{af\sin\gamma}{2} + \frac{bf\sin\gamma}{2} = \frac{ab\sin 2\gamma}{2}$$

De $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$, melyet behelyettesítve, egyszerűsítés és $abf\sin\gamma$-val való végigosztás után az

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2\cos\gamma}{f}$$

egyenlethez jutunk, ebből már kiolvashatjuk, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ független a szelő irányától, mert sem f, sem γ nem függ tőle.

Deeső Zoltán (Bp., I. László g. II. o. t.)