Azt, hogy

$$(a+b+c)^7-a^7-b^7-c^7$$

osztható $(a+b)$-vel, a következő átalakításból láthatjuk be:

$$(a+b+c)^7-a^7-b^7-c^7=(a+b+c)^7-c^7-(a^7+b^7).$$

Itt az első két tag, mint egyenlő kitevőjű hatványok különbsége, mindig osztható az alapok különbségével, ami $c-c=0$ miatt éppen $a+b$. De ezzel a^7+b^7 is osztható, mert egyenlő kitevőjű hatványok összege osztható az alapok összegével, ha a kitevő páratlan, mint esetünkben is. Hasonlóan bizonyíthatjuk a $(b+c)$-vel és a $(c+a)$-val való oszthatóságot is. Minthogy az $a+b$, $b+c$ és $c+a$ tényezőknek általában nincs közös osztójuk, abból, hogy $(a+b+c)^7-a^7-b^7-c^7$ külön-külön mindegyikükkel osztható, következik, hogy szorzatukkal is osztható.

Valamivel nehezebb a 7-tel való oszthatóság kimutatása. Ehhez először azt igazoljuk, hogy n^7-n mindig osztható 7-tel, bármilyen egész számot jelentsen is n. Megint tényezőkre bontásra törekszünk, mint az előző feladatban:

$$n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1).$$

Ismeretes továbbá (és beszorzással is igazolható), hogy

$$\begin{gathered}n^3-1=(n-1)(n^2+n+1),\\(n^3+1)=(n+1)(n^2-n+1).\end{gathered}$$

A jobboldali szorzatok háromtagú tényezőit így alakíthatjuk:

$$\begin{gathered}n^2+n+1=n^2+n-6+7=n^2+3n-2n-6+7=\\=n(n+3)-2(n+3)+7=(n+3)(n-2)+7\end{gathered}$$

és hasonlóan

$$n^2-n+1=(n-3)(n+2)+7.$$

Ezeket felhasználva:

$$\begin{gathered}n^7-n=n(n-1)\big[(n+3)(n-2)+7\big](n+1)\big[(n-3)(n+2)+7\big]=\\=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)+\\+7(n-2)(n-1)n(n+1)(n+3)+\\+7(n-3)(n-1)n(+1)(n+2)+49(n-1)n(n+1)\end{gathered}$$

Az utolsó 3 tagban szemmel látható a 7-tel való oszthatóság, az első tag viszont 7 egymás után következő egész szám szorzata: e tényezők egyike biztosan 7 többszöröse, ennélfogva az egész szorzat is.

Ezekután eredeti számunkról úgy láthatjuk, be hogy osztható 7-tel, ha a következőképpen alakítjuk át:

$$\begin{gathered}(a+b+c)^7-a^7-b^7-c^7=\underbrace{(a+b+c)^7-(a+b+c)}-\\-\underbrace{(a^7-a)}-\underbrace{(b^7-b)}-\underbrace{(c^7-c)}\end{gathered}$$

A kapcsokkal együvé foglalt két-két tag különbsége az előbbiek szerint osztható 7-tel, így összegük ill. különbségük is. De ha az eredeti szám osztható $(a+b)(b+c)(c+a)$-val is és 7-tel is külön-külön, akkor ezek szorzatával is osztható, mivel általában nincs közös osztójuk. Éppen ezt kellett bebizonyítanunk.