Azt kell bizonyítanunk, hogy $a^{2^n+1}-a$ osztható 2-vel és 5-tel, ha n 2-nél nem kisebb egész szám.

$$a^{2^n+1}-a=a\left(a^{2^n}-1\right),$$
$$2^n=2^{2+(n-2)}=2^2\cdot 2^{n-2},$$

ahol
$$n-2\geq 0,$$
és így
$$a\left(a^{2^n}-1\right)=a\left(a^{2^2\cdot 2^{n-2}}-1\right)=a\left[\left(a^{2^2}\right)^{2^{n-2}}-1\right]=$$
$$=a\left[\left(a^4\right)^{2^{n-2}}-1\right].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés egyenlő kitevőjű hatványok különbségének is tekinthető, hiszen $1=1^{2^{n-2}}$, ez a különbség pedig mindig osztható az alapok különbségével, esetünkben (a^4-1)-gyel, ennélfogva eredeti számunk $a(a^4-1)$-gyel.

Ha kimutatjuk, hogy már ez utóbbi szorzatunk: $a(a^4-1)$ is osztható 2-vel és 5-tel, akkor nyilván eredeti számunk is osztható ezekkel, azaz csakugyan 0-ra végződik.

Ámde $\quad a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)=(a-1)(a+1)(a^2+1),$

és $\quad a^2+1=a^2-4+5=(a-2)(a+2)+5,$

tehát
$$a(a^4-1)=a(a-1)(a+1)(a^2+1)=a(a-1)(a+1)\big[(a-2)(a+2)+5\big]=$$
$$=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1).$$

Sikerült tehát $a(a^4-1)$ szorzatunkat két többtényezős szorzat összegére bontanunk; ezeken könnyebben vizsgálhatjuk az oszthatóságot. Az első szorzat öt egymás után következő szám szorzata: ennek tényezői között biztosan találunk 2-vel oszthatót és legalább egy 5-tel oszthatót is. A második szorzat szemmel láthatóan 5 többszöröse, de az utána álló 3 egymást követő szám közül is legalább az egyik páros. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Megjegyzés: Azt, hogy az $a(a^4-1)$ szorzat 2-vel is és 5-tel is osztható, másképpen is bizonyíthatjuk. Már láttuk, hogy
$$a(a^4-1)=(a-1)a(a+1)(a^2+1)$$
A 2-vel való oszthatóság egy pillanatig sem kétséges, hiszen pl. már $a(a+1)$ biztosan páros. Ha a $5k+1$, $5k$ ill. $5k-1$ alakú, akkor rendre az első, második ill. harmadik tényezője osztható 5-tel a jobboldali szorzatnak. Ha pedig $a=5k\pm 2$, akkor
$$a^2+1=25k^2\pm 20k+4+1=5K$$

Grätzer György (Bp., Berzsenyi g. II. o. t.)