Alakítsuk a kérdéses kifejezéseket a következőképpen:

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \frac{\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\lg 1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1},$$

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = (n+1)\lg\frac{n+1}{n} = \frac{-\lg\left(\dfrac{n}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n+1}} = \frac{\lg 1-\lg\dfrac{n}{n+1}}{1-\dfrac{n}{n+1}}.$$

Miután $\lg x$ alulról konkáv függvény, így a 382. feladatban szereplő egyenlőtlenségek[1] „$<$" jel helyett „$>$"-bal érvényesek. Alkalmazzuk (a)-t

$$x_1=1,\quad x_2=1+\frac{1}{n+1},\quad x_3=1+\frac{1}{n}\text{-nel}:$$

$$\frac{\lg\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)-\lg 1}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)-1} > \frac{\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\lg 1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1}$$

vagyis

$$\lg\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

tehát

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n.$$

Másrészt

$$x_1=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n},\ x_2=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},\quad x_3=1\text{-re a } (b) \text{ megfelelőjét alkalmazva}$$

$$n\lg\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{\lg 1-\lg\dfrac{n-1}{n}}{1-\dfrac{n-1}{n}} > \frac{\lg 1-\lg\dfrac{n}{n+1}}{1-\dfrac{n}{n+1}} = (n+1)\lg\frac{n+1}{n}$$

vagyis

$$\lg\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

tehát

$$b_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n,$$

végül nyilvánvaló, hogy

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n.$$

Ha most a_k és b_l a két sorozat egy–egy tetszés szerinti eleme, akkor válasszunk egy m számot, mely sem k-nál, sem l-nél nem kisebb. A bebizonyított egyenlőtlenségek szerint

$$a_k \leqq a_m < b_m \leqq b_l,$$

tehát az a-k sorozatának minden eleme kisebb a b-k sorozatának bármely eleménél.

[1] Lásd IV. k. 3. sz. 66. old.

Ha x nem csak egész értékeket vehet fel, akkor is egyrészt ha $1<\xi_1<\xi_2$, az (a) egyenlőtlenség megfelelőjét $x_1=1$, $x_2=1+\dfrac{1}{\xi_2}$, $x_3=1+\dfrac{1}{\xi_1}$-re alkalmazva

$$\lg\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)^{\xi_2}=\frac{\lg\left(1+\dfrac{1}{\xi_2}\right)-\lg 1}{\left(1+\dfrac{1}{\xi_2}\right)-1}>\frac{\lg\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)-\lg 1}{\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)-1}=\lg\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)^{\xi_1},$$

vagyis

$$\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)^{\xi_1}<\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)^{\xi_2};$$

másrészt, ha $0<\xi_1<\xi_2<1$, akkor $x_1=1-\dfrac{1}{\xi_1}$, $x_2=1-\dfrac{1}{\xi_2}$, $x_3=1$-re (b) megfelelőjét alkalmazzuk, ekkor

$$\lg\left(1-\frac{1}{\xi_1}\right)^{-\xi_1}=\frac{\lg 1-\lg\left(1-\dfrac{1}{\xi_1}\right)}{1-\left(1-\dfrac{1}{\xi_1}\right)}>\frac{\lg 1-\lg\left(1-\dfrac{1}{\xi_2}\right)}{1-\left(1-\dfrac{1}{\xi_2}\right)}=\lg\left(1-\frac{1}{\xi_2}\right)^{-\xi_2},$$

vagyis

$$\left(1+\frac{1}{-\xi_1}\right)^{-\xi_1}>\left(1+\frac{1}{-\xi_2}\right)^{-\xi_2}.$$

Egyenlőtlenségeink azt fejezik ki, hogy $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ az x monoton növekedő függvénye.