

Legyenek egy tetszőleges sokszög oldalai a_1, a_2, \dots, a_k , a hozzájuk tartozó középponti szögek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, a kör sugarát válasszuk mértékegységnek. Ekkor a területre két oldalból és a közbezárt szögből):

$$2T = \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_k,$$

A kerületre pedig

$$K = 2 \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_k}{2} \right).$$

Feltehetjük, hogy a kör középpontja a poligon belsejében van, mert könnyen látható, hogy ellenkező esetben a középponthez legközelebbi oldalt a középpontra tükrözve olyan poligont kapunk, melynek területe is, kerülete is nagyobb mint az eredetié volt.

Ez esetben az α -k 180° -nál kisebbek. Mivel ilyen szögekre a $\sin x$ függvény konkáv, kapjuk, hogy

$$2T = \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_k \leq k \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k} = k \sin \frac{360^\circ}{k}$$

és

$$\begin{aligned} K &= 2 \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_k}{2} \right) \leq \\ &\leq 2k \sin \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{2} \right) = 2k \sin \frac{180^\circ}{k}. \end{aligned}$$

A jobboldalon a szabályos k -szög területének kétszerese, ill. a kerülete áll, így azt kaptuk, hogy a szabályos sokszögnek lesz a területe is kerülete is a legnagyobb.