Sokszor látni azt a hibát, hogy ha bizonyos számoknak kiszámította valaki a számtani közepét, azután hozzá kell még egy számot vennie az adottakhoz, akkor ezek számtani közepét úgy akarja kiszámítani, hogy a már ismert számtani középnek és az új számnak veszi a számtani közepét. Ez természetesen helytelen, de ezt a hibát is haszonná fordíthatjuk, ha kijavítjuk. Legyen

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}, \qquad x' = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

és számítsuk ki azt az y-t, amire tényleg igaz az, hogy x'-nek és y-nak a számtani közepe x. Mivel

$$nx' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (n+1)x - x_{n+1},$$

így

$$\frac{x'+y}{2} = x - \text{ből} \qquad y = 2x - x' = 2x - \frac{(n+1)x - x_{n+1}}{n} = \frac{x_{n+1} + (n-1)x}{n}.$$

Ezt a kifejezést n tagú számtani középnek tekinthetjük, melyben $n-1$ tag megegyezik x-szel, az n-edik pedig x_{n+1}. Ekkor azonban fel is használhatjuk a Jensen-egyenlőtlenségre vonatkozó állítás egy teljes indukciós bizonyítására.

Tegyük fel, hogy egy $f(x)$ függvényre teljesül az

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \tag{1}$$

kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenetlenség egy intervallum bármely két különböző x_1, x_2 abszcisszájára. Be akarjuk bizonyítani, hogy akkor teljesül minden pozitív egész k-val az intervallum bármely k számú abszcisszájára a k-tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség, feltéve, hogy az abszcisszák közt vannak különbözők.

$k = 2$-re a bizonyítandó állítás azonos a feltétellel, tehát nyilván következik belőle. Tegyük fel, hogy valamilyen $k = n$ értékre (n legalább 2) már igazoltuk, hogy

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

és be fogjuk bizonyítani, hogy akkor igaznak kell lennie a megfelelő egyenlőtlenségnek $k = n+1$-re is.Legyen x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} az adott $n+1$ abszcissza. A fenti jelölések és az ott kiszámított y felhasználásával nyerjük (1) szerint, hogy

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}}{n+1}\right) = f(x) = f\left(\frac{x'+y}{2}\right) =$$
$$= f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+(n-1)x}{n}\right) \le$$
$$\le \frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) + f\left(\dfrac{x_{n+1}+(n-1)x}{n}\right)}{2}$$

Az utolsó kifejezés mindkét tagjában a változó érték egy-egy n-tagú számtani közép, így alkalmazható rá feltevésünk szerint a Jensen-egyenlőtlenség, és nyerjük, hogy

$$f(x) \le \frac{\dfrac{f(x_1)+f(x)_2+\ldots+f(x_n)}{n} + \dfrac{f(x_{n+1})+(n-1)f(x)}{n}}{2} =$$
$$= \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)+f(x_{n+1})+(n-1)f(x)}{2n}.$$

Mindenütt meg kellett engednünk az egyenlőség jelét is, mert az előbbi lépésben fennállhat ha $x' = y$, az utóbbiban pedig abban az egy esetben, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ és $x_{n+1} = x$. Az összes feltételek azonban csak akkor teljesülnek, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$, ezt pedig kizártuk. Így az utolsó egyenlőtlenségben már mindig a $<$ jel lesz érvényes.

A pozitív $2n$-nel átszorozva az egyenlőtlenséget és $(n-1)f(x)$-et mindkét oldalból levonva nyerjük, hogy

$$(n+1)f(x) < f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+1}),$$

amiből $(n+1)$-gyel átosztva adódik a Jensen-egyenlőtlenség $k = n+1$-re. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Bizonyításunk tulajdonképpen a Cauchy-féle bizonyításnak (lásd 339. feladat III. évf. 4–5. szám, 201. old.) egy módosítása, annak két lépését összevonva. A két n-tagú számtani közép használata annak felel meg, hogy az n-tagú egyenlőtlenségről a $2n$-tagúra következtetünk, de mindjárt használtuk a másik ötletet is; az $n+1$ abszcisszából $2n$-et csináltunk úgy, hogy hozzájuk vettük még $n-1$-szer a számtani közepüket.