Szorozzuk és osszuk az összegükkel az egyenlőtlenség két oldalán álló kifejezés különbségét

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}{k}}-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}=$$

$$=\frac{k(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2)-(x_1+x_2+\ldots+x_k)^2}{k^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}{k}}+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)}$$

Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mind pozitív vagy nulla, akkor elég a számláló előjelét vizsgálnunk.

$$\begin{gathered}k(x_1^2+\ldots+x_k^2);-(x_1+\ldots+x_k)^2=kx_1^2+\ldots+kx_k^2-\\-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2-2x_1x_3-\ldots-x_k^2=(k-1)x_1^2+\ldots+\\+(k-1)x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-\ldots-2x_{k-1}x_k=(x_1-x_2)^2+\\+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_1-x_k)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+\\+(x_{k-1}-x_k)^2>0,\end{gathered}$$

ha az x-szek között van különböző.

Ha az x-szek között van negatív, akkor a negatív x-szek helyett (-1)-szeresüket beírva a kifejezés csökken, de még így is pozitív, annál inkább az eredeti kifejezés.

A számtani és harmonikus közepek különbsége:

$$\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}-\frac{k}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}}=$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}\right)-k^2}{k\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}\right).}$$

Itt a nevező pozitv, tehát elég a számláló előjelét vizsgálni.

$$\begin{gathered}(x_1+\ldots+x_k)\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}\right)-k^2=\frac{x_1}{x_1}+\frac{x_2}{x_1}+\ldots+\\+\frac{x_k}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_2}+\ldots+\frac{x_k}{x_2}+\ldots+\frac{x_k}{x_1}+\frac{x_k}{x_2}+\ldots+\\+\frac{x_k}{x_k}-k^2=\frac{x_2}{x_1}+\ldots+\frac{x_k}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_2}\ldots+\frac{x_k}{x_2}+\ldots+\\+\frac{x_1}{x_k}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{x_k}+k-k^2.\end{gathered}\tag{2}$$

A megmaradt k^2-k számú tört párosítható, minden tört a reciprok értékével. De tudjuk, hogy pozitív számnak és reciprokának összege nem lehet kisebb mint 2. Tehát a $\frac{k^2-k}{2}$ tagpár összege nem lehet kisebb, mint $2\frac{k^2-k}{2}=k^2-k$, így az (1) kifejezés nem lehet negatív. Nulla is csak úgy lehetne, ha minden x megegyezne, de ezt az esetet kizártuk, tehát (2) pozitív és így az (1) tört is, amivel az állítást bebizonyítottuk.