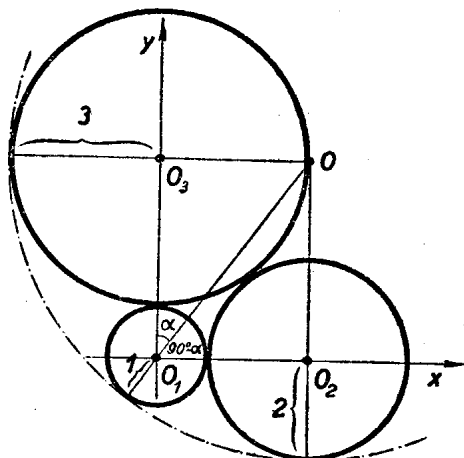


I. megoldás: Egy kivételével valamennyi megoldó előzetes számítás és okoskodás nélkül rátalált a helyes megoldásra: a keresett kör sugara 6 egységnyi. Ezt az eredményt azután igazolták, a következő módon: a megadott három kör középpontjai olyan derékszögű háromszöget alkotnak, melynek befogói 3 és 4, átfogója 6 egységnyi.



Ezt a derékszögű háromszöget átfogójának középpontjára tükrözve olyan téglalappá egészítjük ki, melynek új, negyedik csúcsa a keresett kör középpontja. Ha t. i. ezt a pontot összekötjük mind a három kör középpontjával és ezeket az összekötő egyeneseket rendre meghosszabbítjuk a megfelelő körökkel való metszéspontokig, akkor az így kapott mind a három távolság 6 egységre van ettől a ponttól.

II. megoldás: Ha valaki rálátással nem jön rá a megoldásra, számolással is megtalálja a helyes eredményt. Legyen a keresett kör sugara: r , középpontja: O , ha ezt összekötjük mind a három kör középpontjával, akkor $OO_1 = r - 1$, $OO_2 = r - 2$, $OO_3 = r - 3$. Ha az $O_1OO_3\Delta$ -ben az O_1 csúcsnál levő szöveget α -val jelöljük, akkor az $OO_1O_2\Delta = 90^\circ - \alpha$.

A cosinus tétel felhasználásával:

$$(r - 3)^2 = (r - 1)^2 + 4^2 - 8(r - 1) \cos \alpha,$$

$$(r - 2)^2 = (r - 1)^2 + 3^2 - 6(r - 1) \sin \alpha,$$

mert $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Az egyenletek rendezés után

$$r(2 \cos \alpha - 1) = 2 \cos \alpha + 2,$$

$$r(\sin \alpha - 1) = \sin \alpha + 3.$$

Az első egyenletből:

$$r = \frac{2 \cos \alpha + 2}{2 \cos \alpha - 1},$$

és azt a második egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{2 \cos \alpha + 2}{2 \cos \alpha - 1} (3 \sin \alpha - 1) - (3 \sin \alpha + 3) = 0.$$

Rendezve: $9 \sin \alpha = 8 \cos \alpha - 1$.

Fejlesztjük ki $\sin \alpha$ -t $\cos \alpha$ -val: $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Emeljük négyzetre az egyenletet:

$$81(1 - \cos^2 \alpha) = 64 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 1,$$

ahonnan újabb rendezés után

$$145 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha - 80 = 0,$$

innen $\cos = \frac{4}{5}$, míg a másik gyök, $\cos \alpha = -\frac{20}{29}$ a négyzetemelés előtti egyenletnek nem gyöke. Tehát

$$r = \frac{\frac{8}{5} + 2}{\frac{8}{5} - 1} = \frac{18}{3} = 6.$$

III. Megoldás. Helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy O_1 a középpontja, O_2 az x tengelyen van, O_3 az Y tengelyen. A feladatot megoldó O középpont O_1 -től $(r - 1)$, O_2 -től $(r - 2)$ és O_3 -tól $(r - 3)$ távolságra van, keressük tehát azt az r értéket, amelyre nézve az O_1 -ből $(r - 1)$, O_2 -ből $(r - 2)$ és O_3 -ból $(r - 3)$ sugárral rajzolt körök egy pontban metszik egymást.

A három kör egyenlete:

$$(I) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r-1)^2, & (x-3)^2 + y^2 &= (r-2)^2, \\ x^2 + (y-4)^2 &= (r-3)^2. \end{aligned}$$

Az első és második egyenlet különbségéből $x = \frac{r+3}{3}$ adódik ez az y tengellyel párhuzamos egyenes. Az első és harmadik egyenletből hasonlóan $y = \frac{r+2}{2}$, ez az x tengellyel párhuzamos egyenes.

Ha e két egyenes metszéspontja rajta van az (I) körökön, akkor rajta van pl. az első körön is, tehát:

$$\left(\frac{r+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{r+2}{2}\right)^2 = (r-1)^2$$

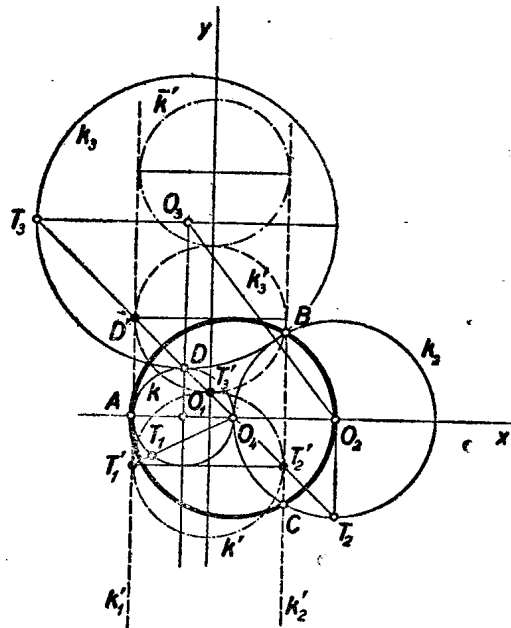
Ennek az egyenletnek a keresett megoldása: $r = 6$; míg a másik gyök $r = -\frac{2}{13}$. Ha figyelembe vesszük, hogy r^* -gal jelölve annak a körnek a sugarát, amelyet a 3 kör kívülről érint, előbbi gondolatmenetünkhöz hasonlóan az

$$(II) \quad x^2 + y^2 = (1+r^*)^2 \quad (x-3)^2 + y^2 = (2+r^*)^2, \quad x^2 + (y-r)^2 = (3+r^*)^2$$

köröknek kell egyetlen ponton áthaladni; másrészt a (II) egyenletek az (I)-ből az $r = -r^*$ helyettesítéssel jönnek létre, akkor $-r = r^* = \frac{2}{13}$, annak a körnek a sugara, melyet a feladatban adott három kör kívülről érint.

IV. Megoldás. A Középiskolai Matematikai Lapok II. évfolyamának 2. számában a Kárteszi Ferenc „A körsorokról” írt tanulmányában foglalkozik a körre való tükrözéssel, amelynek segítségével a mi feladatunkhoz hasonló feladatokat old meg.

Legyen megint O_1 a koordináta-rendszer középpontja ¹, a három kör rendre K_1, K_2, K_3 .



Válasszuk vezérkörnek azt a kört, melynek középpontja a K_1 és K_2 kör érintési pontja O_4 és sugara 2 egységnyi. Ekkor a K_1 kör képe az A pontban a K_1 körhöz húzott érintő, a K_2 kör képe a vezérkör és K_2 hatványvonala K'_2 , amely merőleges az x tengelyre és egyenlete $x = 2$, a K_3 kör képét megszerkeszthetjük a következő megfontolással: K_3 érinti K_1 -t a D pontban, tehát a képének K'_3 -nek a K'_1 -et a D' -ben kell érintenie. De ezzel már a helyzete teljesen meg van határozva, mert K'_2 -t is érintenie kell; K'_3 sugara $1\frac{1}{2}$ egységnyi, mert K'_1 és K'_2 távolsága 3. Annak a körnek, amelyet a K_1, K_2 és K_3 körök belülről érintenek, olyan kör lesz a képe, amely érinti a K'_1, K'_2 egyeneseket és a K'_3 kört. Ilyen kör kettő van. K' és \bar{K}' . Ezek közül – egyszerű szemlélet is mutatja, hogy \bar{K}' , annak a körnek képe, amelyet a három kör kívülről érint és a keresett K kör képe: K' . Az érintési pontok képei: T'_1, T'_2 és T'_3 . T'_3 koordinátái $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

T'_2 -éi: $(2, -1)$.

A $T'_3O_4T'_2$ egyenes a K_2 kört $T_2(3, -2)$ -ben, a K_3 kört $T_3(4, -3)$ -ban metszi. Ezek a keresett K kör érintési pontjai a K_2 , illetve K_3 körön. Középpontját megkapjuk, ha T_3O_3 és T_2O_2 metszéspontját keressük: O -t. O koordinátái: $(3, 4)$ és ebből már következik, hogy $r = 6$.

¹Az ábrán az y tengely tévesen van jelölve.