

**I. megoldás:** Ha  $\alpha$  akármilyen pozitív szám, akkor  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ . Ugyanis az  $(\alpha - 1)^2 \geq 0$  egyenlőtlenségből következik, hogy  $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$ , ezt pedig szabad  $\alpha$ -val osztani, mivel a feltétel szerint  $\alpha > 0$ . Az osztást végrehajtva kapjuk, hogy  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ . Írjuk az igazolandó egyenlőtlenséget ilyen alakban:

$$\left[ \sin 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha} \right] + \frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 3.$$

A zárójelben levő rész a fentiek szerint  $\geq 2$ . A második rész pedig, mivel  $\sin 2\alpha \leq 1$

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 1$$

A két rész összege tehát nem lehet kisebb 3-nál.

*Villányi Ottó (Szentendre, IV. o.)*

**II. megoldás:** Redukáljuk az egyenlőtlenséget nullára. Elegendő a keletkező egyenlőtlenséget igazolni. A baloldal

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha} - 3 &= \frac{2 - 3 \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \\ &= \frac{(1 - \sin 2\alpha)(2 - \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

Ez pedig csak pozitív lehet, mivel pozitív a számlálóban levő szorzat mindkét tényezője, és a nevező is. Ennek folytán a kiindulásra szolgált egyenlőtlenség is helyes.