Helyezzünk most több pontban súlyokat a görbére. Kössük össze a pontokat abban a sorrendben, ahogy a görbén következnek és az utolsót kössük össze az elsővel. Így konvex sokszög keletkezik. A fizikából tudjuk, hogy ha ennek csúcsaiba súlyokat teszünk, akkor a súlypont a sokszög belsejében lesz. Miután pedig a görbe, amibe a sokszöget írtuk, konvex (alulról), így ez esetben is a görbe fölött lesz a súlypont. Ezt szigorúan bebizonyíthatjuk már meglevő ismereteinkből.

Az (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_k, y_k) pontokban rendre elhelyezett $p_1, p_2, \ldots, p_k$ súlyok súlypontja a

$$\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_kx_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}, \quad \frac{p_1y_1+p_2y_2+\ldots+p_ky_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right)$$

pont. Az állítást teljes indukcióval fogjuk igazolni. $k=2$-re már láttuk az állítás helyességét. Tegyük fel, hogy $k=n-1$-re már kiszámítottuk a súlypont koordinátáit $(n>2)$. n darab pont súlypontjához úgy jutunk, hogy vesszük $n-1$ darab pont súlypontját, és ide képzeljük összpontosítva az $n-1$ darab pontba helyezett súlyokat. Ennek és az n-edik pontnak képezzük a súlypontját. Mivel feltevésünk szerint az $n-1$ pont súlypontjának pl. az abszcisszája $\dfrac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}$, a pontban elhelyezendő súly pedig $p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}=p$, így az n pont súlypontjának abszcisszája

$$\frac{p\dfrac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}}{p_2+p_2+\ldots+p_{n-1}}+p_nx_n}{p+p_n}=$$
$$\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha $n-1$ pontra helyes az állítás, akkor helyes n pontra is. Mivel 2-re már láttuk az állítás helyes voltát, ezzel megmutattuk, hogy általánosan érvényes. Az ordinátára szószerint ugyanígy következik az állítás helyessége.

Az eredményben az egyes pontok koordinátáinak teljesen szimmetrikus a szerepe. Így nyilvánvaló, hogy ha más sorrendben vesszük a pontokat, akkor is ugyanehhez a súlyponthoz kell jutnunk. Még akkor is ugyanehhez a súlyponthoz jutunk, ha a súlyokat csoportokba foglaljuk és az egyes csoportok súlypontjaiból számítjuk az egész rendszer súlypontját. Az első m és következő n pont súlypontjának abszcisszája

$$\xi_1=\frac{p_1x_1+\cdots+p_mx_m}{p+\cdots+p_m} \quad \text{és} \quad \xi_2=\frac{p_{m+1}x_1+\cdots+p_{m+n}x_{m+n}}{p_{m+1}+\cdots+p_{m+n}}.$$

Ide a megfelelő súlyok összegét helyezve kapjuk az egész rendszer súlypontjára, hogy

$$\frac{(p_1+\ldots+p_m)\,\xi_1+(p_{m+1}+\ldots+p_{m+n})\,\xi_2}{p_1+\ldots+p_m+p_{m+1}+\ldots+p_{m+n}}=$$
$$=\frac{p_1x_1+\ldots+p_mx_m+p_{m+1}x_{m+1}+\ldots+p_{m+n}x_{m+n}}{p_1+\ldots+p_m+p_{m+1}+\ldots+p_{m+n}},$$

és ugyanígy számolhatunk az ordinátákra is.

Helyezzünk most az $f(x)$ görbe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ abszcisszájú pontjaiba rendre $p_1, p_2, \ldots, p_k$ súlyokat. Megmutatjuk, hogy a görbe akkor és csakis akkor konvex, ha

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_kx_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right)<$$
$$<\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\ldots+p_kf(x_k)}{p_1+p_2+\ldots+p_k}. \tag{4}$$

$k=2$-re az (1) egyenlőtlenség tartalmazza az állítást; nagyobb k-kra teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Tegyük fel, hogy $k=n-1$-re már igazoltuk az állítást $(n>2)$: $f(x)$ akkor és csakis akkor konvex, ha bármely $x_1, \ldots, x_{n-1}$-re

$$f\left(\frac{p_1x_1+\ldots+p_{n-1}x_1}{p_1+\ldots+p_{n-1}}\right)<\frac{p_1f(x_1)+\ldots+p_{n-1}f(x_{n-1})}{p_1+\ldots+p_{n-1}}.$$

Ekkor ezen feltevés és (1) szerint, ha a függvény konvex, akkor

$$f\left(\frac{p_1x_1+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}+p_nx_n}{p_1+\ldots+p_{n-1}+p_n}\right)=$$

$$=f\left(\frac{(p_1+\ldots+p_{n-1})\dfrac{p_1x_1+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}}{p_1+\ldots+p_{n-1}}+p_nx_n}{(p_1+\ldots+p_{n-1})+p_n}\right)<$$

$$<\frac{(p_1+\ldots+p_{n-1})f\left(\dfrac{p_1x_1+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}}{p_1+\ldots+p_{n-1}}\right)+p_nf(x_n)}{(p_1+\ldots+p_{n-1})+p_n}<$$

$$<\frac{(p_1+\ldots+p_{n-1})\dfrac{p_1f(x_1)+\ldots+p_{n-1}f(x_{n-1})}{p_1+\ldots+p_{n-1}}+p_nf(x_n)}{p_1+\ldots+p_{n-1}+p_n}=$$

$$=\frac{p_1f(x_1)+\ldots+p_{n-1}f(x_{n-1})+p_nf(x_n)}{p_1+\ldots+p_{n-1}+p_n}.$$

Ebből következik, hogy állitásunk minden k-ra helyes. Megfordítva ha a (4) egyenlőtlenség fennáll, akkor a függvény konvex, hiszen $(1')$ a (4) egyenlőtlenségnek speciális esete.

Itt is írhatunk $\dfrac{p_1}{p_1+\ldots+p_k}$, $\dfrac{p_2}{p_1+\ldots+p_k}$, $\ldots$, $\dfrac{p_k}{p_1+\ldots+p_k}$ helyett q_1, q_2, $\ldots$, q_k-t. A p-kkel együtt ezek is pozitívok és $q_1+q_2+\ldots+q_k=1$.

Ekkor a (4) egyenlőtlenség így is írható

$$\begin{gathered}f(q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_kx_k)<\\<q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\ldots+q_kf(x_k)\end{gathered}\tag{$4'$}$$

Ha speciálisan $q_1=q_2=\ldots=q_k=\dfrac{1}{k}$, akkor az

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_k)}{k}.$$

Ha a függvény konvex, akkor ez is mindig teljesül.

A (4) és $(4')$ egyenlőtlenséget *k-tagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenségnek* nevezzük. Az utolsó egyenlőtlenség a *k-tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség.*